Algorithmen

Vorlesung im WS 2002/2003

Oliver Vornberger

Olaf Müller

Ralf Kunze

Praktische Informatik
Fachbereich Mathematik/Informatik
Universität Osnabrück

Literatur

- Guido Krüger:
  GoTo Java 2, Addison-Wesley, 2001.
- Ken Arnold & James Gosling & David Holmes:
  Die Programmiersprache Java, Addison-Wesley, 2001.
- David Flanagan:
  "Java in a Nutshell, (3. Auflage: Deutsche Ausgabe für Java 1.3), O'Reilly, 2001.
- Judith Bishop:
  Java lernen, Addison Wesley, 2001.
- Timothy Budd:
  Classic Data Structures in Java, Addison Wesley, 2001.

Danksagung

Wir danken ...

... Frau Gerda Holmann für sorgfältiges Erfassen des Textes und Erstellen der Grafiken.

... Frau Astrid Heinze für die Konvertierung gemäß neuer Rechtschreibung.

... Herrn FrankLohmeyer für die Bereitstellung des Pakets `AlgoTools` von *Java*-Klassen zur vereinfachten Ein- und Ausgabe sowie für die Implementation eines *Java-Applets* zur Simulation der Beispiel-Programme im WWW-Browser.

... Herrn Frank M. Thiesing für die Bereitstellung eines Entwicklungswerkzeuges zur Typesetting-Organisation.

... Herrn Viktor Herzog für die Konvertierung des Skripts nach HTML.

HTML-Version
Der Inhalt dieser Vorlesung kann online betrachtet werden unter
`http://www-lehre.inf.uos.de/~ainf`

Osnabrück, im September 2002

Oliver Vornberger Olaf Müller Ralf Kunze

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung **11**

1.1 Informatik 11

1.2 Algorithmus, Programm, Prozess 12

1.3 Anweisungen, Ablaufprotokoll 12

2 Java **15**

2.1 Sprachmerkmale 15

2.2 Variablen 16

2.3 Kontrollstrukturen 16

2.4 Einfache Datentypen 22

2.4.1 Ganze Zahlen (`byte`, `short`, `int`, `long`) 22

2.4.2 Gleitkommazahlen (`float, double`) 25

2.4.3 Boolean (`boolean`) 29

2.4.4 Charakter (`char`) 30

2.4.5 Typumwandlung 31

2.4.6 Konstanten 34

3 Felder **35**

3.1 Feld von Ziffern 36

3.2 Feld von Daten 37

3.3 Feld von Zeichen 38

3.4 Feld von Wahrheitswerten 39

3.5 Feld von Indizes 40

3.6 Feld von Zuständen 41

3.7 Lineare und binäre Suche 43

4 Klassenmethoden **45**

5 Rekursion **49**
5.1 Fakultät, Potenzieren, Fibonacci, GGT 50
5.2 Türme von Hanoi 51

6 Komplexität und Verifikation **53**
6.1 O-Notation 53
6.2 Korrektheit und Terminierung 57
6.3 Halteproblem 60

7 Sortieren **61**
7.1 Selection Sort 62
7.2 Bubblesort 63
7.3 Mergesort 64
7.4 Quicksort 67
7.5 Bestimmung des Medians 68
7.6 Heapsort 70
7.7 Untere Schranke für Sortieren durch Vergleichen 74
7.8 Bucket Sort 76
7.9 Radix Sort 77
7.10 Externes Sortieren 79

8 Objektorientierte Programmierung **81**

9 Abstrakte Datentypen **89**
9.1 Liste 89
9.2 Keller 93
9.3 Exceptions: throw + try + catch 100
9.4 Schlange 103
9.5 Baum 106
9.6 Suchbaum 115
9.7 AVL-Baum 123
9.8 Spielbaum 135

10 Hashing **139**
10.1 Offenes Hashing 140
10.2 Geschlossenes Hashing 140

11 Graphen **149**

11.1 Implementation von Graphen 151

11.2 Graphalgorithmen 152

Verzeichnis der Java-Programme

AVLBaum.java 126
AVLBaumTest.java 134
Angestellter.java 86
Arbeiter.java 86
ArrayAbzaehlreim.java 40
ArraySchlange.java 104
ArraySchlangeTest.java 105
AusnahmeKeller.java 101
AusnahmeKellerTest.java 102
Automat.java 42
Baum.java 106
Bedingung.java 17
BreitenSuche.java 111
BubbleSort.java 63
BucketSort.java 76
CharComparable.java 117
CharKeller.java 98
Collatz.java 15
Comparable.java 117
Datum.java 82
Fakultaet.java 20
Fall.java 18
Feld.java 35
Firma.java 87
GGT.java 21
Ganzzahl.java 32

GeHashing.java 143
Gleitkomma.java 28
Graph.java 153
Graph_IO.java 154
Graph_Test.java 157
Graph_Tiefensuche.java 155
Graph_TopoSort.java 156
Hanoi.java 51
HashTest.java 146
HeapSort.java 72
Keller.java 93
KellerFehler.java 100
Kind.java 88
Klammer.java 97
Konstanten.java 34
Liste.java 90
Matrix.java 37
Menge.java 118
Merge.java 64
Methoden.java 46
Mitarbeiter.java 86
OfHashing.java 142
Parameter.java 47
Person.java 83
PersonTest.java 85
Postfix.java 98
PostfixBaumBau.java 113
PostfixPreorderTest.java 114
PreorderTraverse.java 114
QuickSort.java 67
QuickSortTest.java 68
Rekursion.java 50
Reverse.java 96
Schlange.java 103

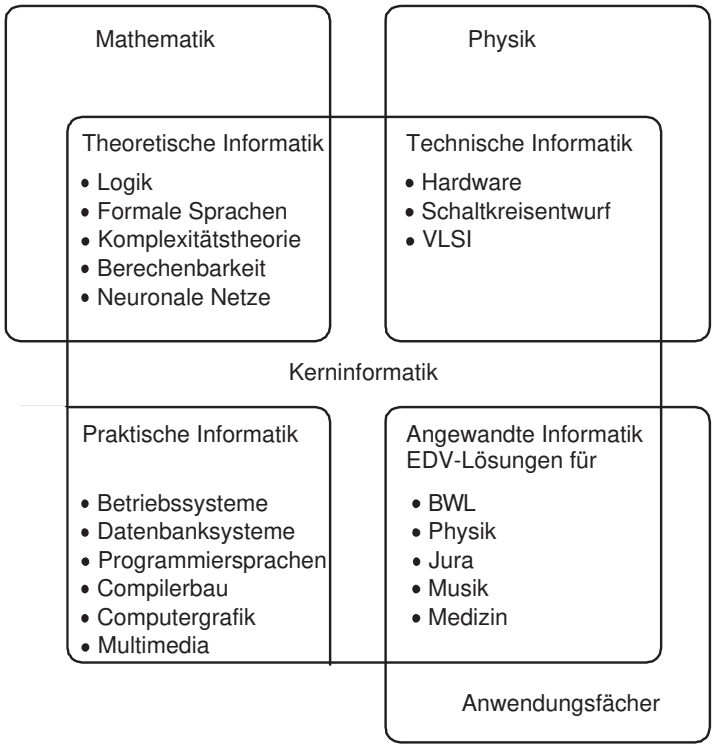
`Schleife.java` 19
`SelectionSort.java` 62
`Sichtbarkeit.java` 48
`Sieb.java` 39
`SortTest.java` 66
`SpielBaum.java` 137
`StringComparable.java` 118
`Student.java` 84
`SuchBaum.java` 119
`SuchBaumTest.java` 121
`Suche.java` 43
`TiefenSuche.java` 110
`Traverse.java` 109
`TraverseTest.java` 112
`Umwandlung.java` 33
`VerweisBaum.java` 108
`VerweisKeller.java` 95
`VerweisListe.java` 91
`VerweisListeTest.java` 92
`Zeichen.java` 31
`Zeichenkette.java` 38
`Ziffern.java` 36

Kapitel 1

Einführung

1.1 Informatik

Wissenschaft von der EDV
Konzepte, unabhängig von Technologie
Formalismus
Interdisziplinärer Charakter



1.2 Algorithmus, Programm, Prozess

Eine endlich lange Vorschrift, bestehend aus Einzelanweisungen, heißt *Algorithmus*.

Beispiele:

Telefonieren:	Hörer abnehmen Geld einwerfen wählen sprechen auflegen
Kochrezept:	Man nehme ...
Bedienungsanleitung:	Mit Schlüssel S die Mutter M auf Platte P festziehen.

Der Durchführende kennt die Bedeutung der Einzelanweisungen; sie werden deterministisch, nicht zufällig abgearbeitet. Endliche Vorschrift bedeutet **nicht** endliche Laufzeit, aber die Beschreibung der Vorschrift muss endlich sein.

Hier: Elementaranweisungen müssen vom Computer verstanden werden.

Programm	$\rightarrow$	Maschinenprogramm
`if (a > b)`	Compiler	`011011101110110111`

Ein für den Compiler formulierter Algorithmus heißt *Programm*.
Ein Programm in Ausführung heißt *Prozess*.

1.3 Anweisungen, Ablaufprotokoll

Elementare Anweisungen

Beispiel: teile x durch 2
erhöhe y um 1

Strukturierte Anweisungen

enthalten Kontrollstruktur, Bedingung, Teilanweisungen.
Beispiele:

```
WENN es tutet
   DANN waehle
   SONST lege auf
```

```
abheben
waehlen
SOLANGE besetzt ist TUE
                      auflegen
                      abheben
                      waehlen
```

Beispiel für einen Algorithmus in umgangssprachlicher Form

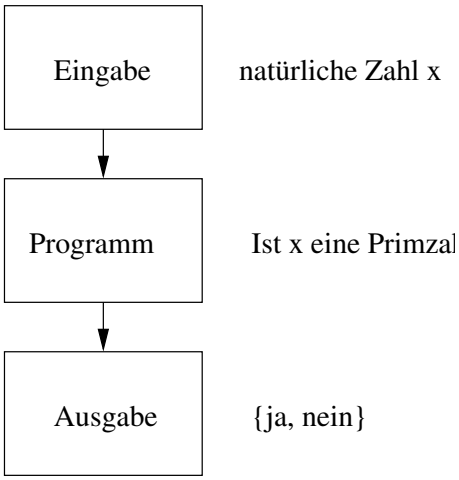
```
lies x
setze z auf 0
SOLANGE x ≠ 1 TUE
   WENN x gerade
      DANN halbiere x
      SONST verdreifache x und erhoehe um 1
   erhoehe z um 1
drucke z
```

Ablaufprotokoll (`trace`)

Zeile	x	z
	undef.	undef.
1	3	undef.
2	3	0
3	10	0
4	10	1
3	5	1
4	5	2
3	16	2
4	16	3
3	8	3
4	8	4
3	4	4
4	4	5
3	2	5
4	2	6
3	1	6
4	1	7
5	Ausgabe	7

Programm iteriert Collatz-Funktion
$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$f(x) =$ Anzahl der Iterationen, um x auf 1 zu transformieren

Typisch: Programm löst Problem



Terminierung, Korrektheit und Effizienz sind nicht algorithmisch zu bestimmen. Dafür ist jeweils eine neue Idee erforderlich.

Kapitel 2

Java

2.1 Sprachmerkmale

```
/****************************  Collatz.java  *********************************/

import AlgoTools.IO;

/**  Berechnet Collatz-Funktion, d.h.
 *   Anzahl der Iterationen der Funktion g: N -> N
 *   bis die Eingabe auf 1 transformiert ist
 *   mit g(x) = x/2 falls x gerade, 3*x+1 sonst
 */

public class Collatz {

  public static void main(String [] argv) {

    int x, zaehler;                          // definiere 2 Variablen
    zaehler = 0;                             // setze zaehler auf 0

    x = IO.readInt("Bitte eine Zahl: ");     // fordere eine Zahl an

    while (x != 1) {                         // solange x ungleich 1 ist
        if (x % 2 == 0)                      // falls x gerade ist
            x = x / 2;                       // teile x durch 2
        else                                 // andernfalls
            x = 3*x+1;                       // nimm x mit 3 mal und add. 1
        zaehler++;                           // erhoehe zaehler um eins
        IO.println(x);                       // gib x aus
    }
    IO.println("Anzahl der Iterationen: " + zaehler);
  }
}
```

Java ist eine objektorientierte Programmiersprache: Die Modellierung der Realwelt erfolgt durch in Klassenhierarchien zusammengefasste Objekte, beschrieben durch Datenfelder und Methoden. Datenfelder sind zur Klasse oder ihren Objekten gehörende Daten; Methoden sind Anweisungsfolgen, die auf den Datenfeldern operieren, um ihren Zustand zu manipulieren.

Der Collatz-Algorithmus als Java-Programm besteht aus der Definition der Klasse `Collatz` mit der Methode `main`. Nach Übersetzung des Programms in den maschinenunabhängigen Bytecode wird die Methode `main` gestartet, sobald die sie umschließende Klasse geladen wurde. Der Quelltext besteht aus durch Wortzwischenräume (Leerzeichen, Tabulatoren, Zeilen- und Seitenvorschubzeichen) getrennte Token. Zur Verbesserung der Lesbarkeit werden Kommentare eingestreut, entweder durch `/* ... */` geschachtelt oder durch `//` angekündigt bis zum Zeilenende. Der Dokumentationsgenerator ordnet den durch `/** ... */` geklammerten Vorspann der nachfolgenden Klasse zu. Die von den Schlüsselwörtern verschieden gewählten Bezeichner beginnen mit einem Buchstaben, Unterstrich (`_`) oder Dollarzeichen (`$`). Darüberhinaus dürfen im weiteren Verlauf des Bezeichners auch Ziffern verwendet werden. Zur Vereinfachung der Ein-/Ausgabe verwenden wir die benutzer-definierte Klasse `AlgoTools.IO` mit den Methoden `readInt` und `println`.

2.2 Variablen

Variablen sind benannte Speicherstellen, deren Inhalte gemäß ihrer vereinbarten Typen interpretiert werden. Java unterstützt folgende "eingebaute" Datentypen (genannt *einfache Datentypen*).

`boolean`	entweder `true` oder `false`
`char`	16 Bit Unicode
`byte`	vorzeichenbehaftete ganze Zahl in 8 Bit
`short`	vorzeichenbehaftete ganze Zahl in 16 Bit
`int`	vorzeichenbehaftete ganze Zahl in 32 Bit
`long`	vorzeichenbehaftete ganze Zahl in 64 Bit
`float`	Gleitkommazahl in 32 Bit
`double`	Gleitkommazahl in 64 Bit

2.3 Kontrollstrukturen

Kontrollstrukturen regeln den dynamischen Ablauf der Anweisungsfolge eines Programms durch Bedingungen, Verzweigungen und Schleifen.

```
/****************************  Bedingung.java  ******************************/

import AlgoTools.IO;

/**  Verzweigung durch Bedingung (if-Anweisung, Bedingungsoperator)
 *
 *   Vergleichsoperatoren:   <    kleiner
 *                           <=   kleiner gleich
 *                           ==   gleich
 *                           >    groesser
 *                           >=   groesser gleich
 *                           !=   ungleich
 *
 *   logische Operatoren:    &&   und
 *                           ||   oder
 *                           ^    exklusives oder
 *                           !    nicht
 */

public class Bedingung {

  public static void main (String [] argv) {

    int x = -5, y, m;                     // definiere 3 Integer-Variablen
                                          // davon eine initialisiert

    if (x < 0) x = -x;                    // setze x auf Absolutbetrag

    if (x < 0) y = -x; else y = x;        // setze y auf den
                                          // Absolutbetrag von x

    m = IO.readInt("Bitte Monatszahl: ");
    if      ((3 <= m) && (m <=  5)) IO.println("Fruehling");
    else if ((6 <= m) && (m <=  8)) IO.println("Sommer");
    else if ((9 <= m) && (m <= 11)) IO.println("Herbst");
    else if (m==12 || m==1 || m==2) IO.println("Winter");
    else                            IO.println("unbekannte Jahreszeit");

    x = x % 2 == 0 ? x/2 : 3*x + 1;       // bedingter Ausdruck:
                                          // weise der linken Seite
                                          // den Ausdruck vor ':' zu,
                                          // falls Bedingung vor '?' wahr;
  }                                       // sonst Ausdruck hinter ':'
}
```

```
/****************************  Fall.java  ************************************/

import AlgoTools.IO;

/**  Verzweigung durch Fallunterscheidung (switch/case-Anweisung)
 *
 */

public class Fall {

  public static void main (String [] argv) {

    int zahl  = 42;
    int monat = 11;

   switch (zahl % 10) {// verzweige in Abhaengigkeit der letzten Ziffer von zahl

        case 0:  IO.println("null  "); break;
        case 1:  IO.println("eins  "); break;
        case 2:  IO.println("zwei  "); break;
        case 3:  IO.println("drei  "); break;
        case 4:  IO.println("vier  "); break;
        case 5:  IO.println("fuenf "); break;
        case 6:  IO.println("sechs "); break;
        case 7:  IO.println("sieben"); break;
        case 8:  IO.println("acht  "); break;
        case 9:  IO.println("neun  "); break;
    }


    switch(monat) {                  // verzweige in Abhaengigkeit von monat

        case  3: case  4: case  5:   IO.println("Fruehling"); break;
        case  6: case  7: case  8:   IO.println("Sommer   "); break;
        case  9: case 10: case 11:   IO.println("Herbst   "); break;
        case 12: case  1: case  2:   IO.println("Winter   "); break;
        default:                     IO.println("unbekannte Jahreszeit");
    }

  }
}
```

```
/***************************  Schleife.java  **********************************/

import AlgoTools.IO;

/**  for-Schleife, while-Schleife, do-while-Schleife, break, continue
 */

public class Schleife {

  public static void main (String [] argv) {

    int i, x=10, y=2, summe;                  // 4 Integer-Variablen

    for (i=1; i<=10; i++) IO.println(i*i,6);  // drucke 10 Quadratzahlen

    while (x > 0) {                           // solange x groesser als 0
        x--;                                  // erniedrige x um eins
        y = y + 2;                            // erhoehe y um zwei
    }

    do {
        x++;                                  // erhoehe x um eins
        y += 2;                               // erhoehe y um 2
    } while (x < 10);                         // solange x kleiner als 10

    while (true) {                            // auf immer und ewig
        x /= 2;                               // teile x durch 2
        if (x == 1) break;                    // falls x=1 verlasse Schleife
        if (x % 2 == 0) continue;             // falls x gerade starte Schleife
        x = 3*x + 1;                          // verdreifache x und erhoehe um 1
    }

    IO.println("Bitte Zahlen eingeben. 0 als Abbruch");
    summe = 0;                                // initialisiere summe
    x = IO.readInt();                         // lies x ein
    while (x != 0) {                          // solange x ungleich 0 ist
        summe += x;                           // erhoehe summe
        x = IO.readInt();                     // lies x ein
    }
    IO.println("Die Summe lautet " + summe);

    do {
        IO.print("Bitte Monatszahl: ");       // Aufforderung
        x = IO.readInt();                     // lies x ein
    } while (( x < 1) || (x > 12));           // solange x unzulaessig
  }
}
```

```
/***************************  Fakultaet.java  *********************************/

import AlgoTools.IO;

/**  Berechnung der Fakultaet mit for-, while- und do-while-Schleifen
  *
  *  n! :=   1 fuer n=0,
  *          1*2*3* ... *n sonst
  *
  */

public class Fakultaet {

  public static void main (String [] argv) {

    int i, n, fakultaet;                    // 3 Integer-Variablen

    n = IO.readInt("Bitte Zahl: ");         // fordere Zahl an


    fakultaet = 1;                          // berechne n! mit for-Schleife
    for (i = 1; i <= n; i++)
        fakultaet = fakultaet * i;
    IO.println(n + " ! = " + fakultaet);


    fakultaet = 1;                          // berechne n! mit while-Schleife
    i = 1;
    while (i <= n) {
        fakultaet = fakultaet * i;
        i++;
    }
    IO.println(n + " ! = " + fakultaet);


    fakultaet = 1;                          // berechne n! mit do-while-Schleife
    i = 1;
    do {
        fakultaet = fakultaet * i;
        i++;
    } while (i <= n);
    IO.println(n + " ! = " + fakultaet);
  }
}
```

```
/***************************  GGT.java  ***************************************/

import AlgoTools.IO;

/**  Berechnung des GGT
 *
 *   ggt(x,y) =     groesster gemeinsamer Teiler von x und y
 *
 *                  x                 falls x = y
 *   ggt(x,y) =     ggt(x-y, y)       falls x > y
 *                  ggt(x, y-x)       falls y > x
 *
 *                  denn wegen x=t*f1 und y=t*f2 folgt (x-y) = t*(f1-f2)
 *
 *                  x                 falls y = 0
 *   ggt(x,y) =     ggt(y, x mod y)   sonst
 *
 */

public class GGT {

    public static void main (String [] argv) {

        int teiler, a, b, x, y, z;                  // 6 Integer-Variablen

        IO.println("Bitte zwei Zahlen: ");
        a=x=IO.readInt();  b=y=IO.readInt();        // lies 2 Zahlen ein

        teiler = x;                                 // beginne mit einem teiler
        while ((x % teiler != 0) ||                 // solange x nicht aufgeht
               (y % teiler != 0))                   // oder y nicht aufgeht
            teiler--;                               // probiere Naechstkleineren
        IO.println("GGT = " + teiler);

        while (a != b)                              // solange a ungleich b
            if (a > b) a = a - b;                   // subtrahiere die kleinere
            else       b = b - a;                   // Zahl von der groesseren
        IO.println("GGT = " + a);

        while (y != 0) {                            // solange y ungleich 0
            z = x % y;                              // ersetze x durch y
            x = y;                                  // und y durch x modulo y
            y = z;
        }
        IO.println("GGT = " + x);
    }
}
```

2.4 Einfache Datentypen

Der Datentyp legt fest:

- Wertebereich,
- Operationen.

Die Implementierung verlangt:

- Codierung.

einfach = von der Programmiersprache vorgegeben.

2.4.1 Ganze Zahlen (`byte`, `short`, `int`, `long`)

Wertebereich: ganze Zahlen darstellbar in 8, 16, 32, 64 Bits.

Typ	Wertebereich	Länge
`byte`	`-128..127`	8 Bit
`short`	`-32768..32767`	16 Bit
`int`	`-2147483648..2147483647`	32 Bit
`long`	`-9223372036854775808..9223372036854775807`	64 Bit

Codierung

Codierung der positiven Zahlen in Dualzahldarstellung:

Sei

$$x = \sum_{i=0}^{n-1} d_i \cdot 2^i$$

Algorithmus dezimal → dual:

```
while (x != 0){
   if (x%2 == 0) IO.print('0');
            else IO.print('1');
   x = x/2;
}
```

Obacht: Bits werden rückwärts generiert!

Codierung der ganzen Zahlen im 2-er Komplement:

d_3	d_2	d_1	d_0	x
0	1	1	1	7
0	1	1	0	6
0	1	0	1	5
0	1	0	0	4
0	0	1	1	3
0	0	1	0	2
0	0	0	1	1
0	0	0	0	0
1	1	1	1	-1
1	1	1	0	-2
1	1	0	1	-3
1	1	0	0	-4
1	0	1	1	-5
1	0	1	0	-6
1	0	0	1	-7
1	0	0	0	-8

Beispiel zur Berechnung des 2-er Komplements einer negativen Zahl:

Gegeben $-x$	`-4`
Finde d_i zu x	`0100`
Invertiere Bits	`1011`
Addiere 1	`1100`

Vorteil: Nur ein Addierwerk!

```
  0011   3
+ 1011  -5
---------
= 1110  -2
```

Subtraktion mittels Negierung auf Addition zurückführen. Obacht: Überlauf beachten!

```
  0111   7
+ 0001   1
----------
= 1000  -8   falsch
```

Trick: Vorzeichenbits verdoppeln, müssen nach der Verknüpfung identisch sein:

```
  00111        7                  00011      3
+ 00001        1                  11011     -5
-------------------------------------------------
  01000                           11110     -2
Ergebnis undefiniert              Ergebnis ok!
```

Operatoren

`+`	:	`Ganzzahl`	×	`Ganzzahl`	→	`Ganzzahl`	Addition
`-`	:	`Ganzzahl`	×	`Ganzzahl`	→	`Ganzzahl`	Subtraktion
`*`	:	`Ganzzahl`	×	`Ganzzahl`	→	`Ganzzahl`	Multiplikation
`/`	:	`Ganzzahl`	×	`Ganzzahl`	→	`Ganzzahl`	ganzzahlige Division
`%`	:	`Ganzzahl`	×	`Ganzzahl`	→	`Ganzzahl`	Modulo = Rest der Division
`&`	:	`Ganzzahl`	×	`Ganzzahl`	→	`Ganzzahl`	bitweise Und-Verknüpfung
`|`	:	`Ganzzahl`	×	`Ganzzahl`	→	`Ganzzahl`	bitweise Oder-Verknüpfung
`^`	:	`Ganzzahl`	×	`Ganzzahl`	→	`Ganzzahl`	bitweise XOR-Verknüpfung
`<<`	:	`Ganzzahl`	×	`Ganzzahl`	→	`Ganzzahl`	Linksshift
`>>`	:	`Ganzzahl`	×	`Ganzzahl`	→	`Ganzzahl`	Vorzeichen erhaltender Rechtsshift
`>>>`	:	`Ganzzahl`	×	`Ganzzahl`	→	`Ganzzahl`	Vorzeichen ignorierender Rechtsshift
`~`	:	`Ganzzahl`			→	`Ganzzahl`	Bitweise Negation
`-`	:	`Ganzzahl`			→	`Ganzzahl`	Vorzeichenumkehr
`++`	:	`Ganzzahl`			→	`Ganzzahl`	Inkrement
`--`	:	`Ganzzahl`			→	`Ganzzahl`	Dekrement

Konstantenbezeichner

```
123    +123    -123
```

Eine führende Null kündigt eine Oktalzahl zur Basis `8` an: `0173`. Eine führende Null mit nachfolgendem `x` oder `X` kündigt eine Hexadezimalzahl zur Basis `16` an: `0x7B`.

2.4.2 Gleitkommazahlen (`float, double`)

Die Typen `float` und `double` dienen zur Speicherung von Gleitkommazahlen nach dem IEEE-Standard 754-1985 in der Form Vorzeichen, Exponent, Mantisse.

Codierung

Bei der Codierung für 32 Bits (`float`) benötigt das Vorzeichen 1 Bit, der Exponent 8 Bits, die Mantisse 23 Bits.

X	XXXXXXXX	XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
Vorzeichen s	Exponent e	Mantisse f

$$\text{Wert} = \begin{cases} (-1)^s \times 2^{e-127} \times 1.f & \text{falls } 0 < e < 255 \quad \text{(normalisiert)} \\ (-1)^s \times 2^{-126} \times 0.f & \text{falls } e = 0 \quad \text{(subnormal)} \end{cases}$$

Bei einer normalisierten Darstellung liegt der Wert der Mantisse $1.f$ im Intervall $[1, 2[$.

Hierbei haben Dualzahlen nach dem Komma

$$0.d_{-1}d_{-2}d_{-3}\ldots d_{-k} \text{ die Bedeutung } \sum_{i=-k}^{-1} d_i \cdot 2^i$$

Algorithmus dezimal $\rightarrow$ dual:

Sei Dezimalzahl x gegeben. Bestimme größte 2-er Potenz 2^d mit $2^d \leq x$. Setze $f = (x - 2^d)/2^d$. Offenbar gilt

$$x = (1 + f) \cdot 2^d \text{ mit } 0 \leq f < 1.$$

Bestimme die Dualzahl-Bits von f durch

```
for (i = 0; i < 23; i++) {
   f = f * 2.0;
   if (f >= 1.0) {IO.print('1'); f = f - 1.0;}
      else IO.print('0');
}
```

Beispiel: Sei $x = 13.5$ gegeben. Als Codierung ergibt sich

$$\begin{aligned} s &= 0 \\ f &= (13.5 - 2^3)/2^3 = 0.6875 = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \\ e &= 3 + 127 = 130 \end{aligned}$$

0	10000010	10110000000000000000000
Vorzeichen	Exponent	Mantisse

Bei einer subnormalisierten Darstellung liegt der Wert der Mantisse $0.f$ im Intervall $[0, 1[$.

Exponent $e = 0$ und Mantisse $f = 0$ repräsentieren die vorzeichenbehaftete Null. Exponent $e = 255$ und Mantisse $f = 0$ repräsentieren das vorzeichenbehaftete Unendlich($+\infty$, $-\infty$). Exponent $e = 255$ und Mantisse $f \neq 0$ repräsentieren die undefinierte Zahl `NaN` (not a number).

Beispiel: $2^{-130} = 1/16 \cdot 2^{-126}$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} s &= 0 \\ f &= 0.0625 = 1/16 \\ e &= 0 \end{aligned}$$

Codierung

0	00000000	00010000000000000000000
Vorzeichen	Exponent	Mantisse

Die größte darstellbare positive Zahl liegt knapp unter

$$2 \cdot 2^{254-127} = 2^{128} \approx 10^{38}$$

0	11111110	11111111111111111111111
Vorzeichen	Exponent	Mantisse

Die kleinste darstellbare positive Zahl lautet

$$2^{-23} \cdot 2^{-126} = 2^{-149} \approx 10^{-45}$$

0	00000000	00000000000000000000001
Vorzeichen	Exponent	Mantisse

Bei der Codierung für 64 Bits (`double`) benötigt das Vorzeichen 1 Bit, der Exponent 11 Bits, die Mantisse 52 Bits.

X	XXXXXXXXXXX	XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
Vorzeichen s	Exponent e	Mantisse f

$$\text{Wert} = \begin{cases} (-1)^s \times 2^{e-1023} \times 1.f & \text{falls } 0 < e < 2047 \quad \text{(normalisiert)} \\ (-1)^s \times 2^{-1022} \times 0.f & \text{falls } e = 0 \quad \text{(subnormal)} \end{cases}$$

Damit liegt die größte darstellbare positive Zahl knapp unter

$$2 \cdot 2^{2046-1023} \approx 10^{308}$$

Die kleinste darstellbare positive Zahl lautet

$$2^{-52} \cdot 2^{-1022} = 2^{-1074} \approx 10^{-324}$$

Operatoren

`+`	:	`Gleitkomma` × `Gleitkomma`	→	`Gleitkomma`	Addition
`-`	:	`Gleitkomma` × `Gleitkomma`	→	`Gleitkomma`	Subtraktion
`*`	:	`Gleitkomma` × `Gleitkomma`	→	`Gleitkomma`	Multiplikation
`/`	:	`Gleitkomma` × `Gleitkomma`	→	`Gleitkomma`	Division
`%`	:	`Gleitkomma` × `Gleitkomma`	→	`Gleitkomma`	Modulo
`++`	:	`Gleitkomma`	→	`Gleitkomma`	Inkrement um 1.0
`--`	:	`Gleitkomma`	→	`Gleitkomma`	Dekrement um 1.0

Multiplikation: (Exponenten addieren, Mantissen multiplizieren)

Beispiel:

$$\begin{array}{ccccc} 12 & * & 20 & = & \\ 1.5 \cdot 2^3 & * & 1.25 \cdot 2^4 & = & \\ 1.5 \cdot 1.25 & * & 2^3 \cdot 2^4 & = & \\ 1.875 & * & 2^7 & = & 240 \end{array}$$

Addition: (Exponenten angleichen, Mantissen addieren)

Beispiel:

$$\begin{array}{ccccc} 12 & + & 20 & = & \\ 1.5 \cdot 2^3 & + & 1.25 \cdot 2^4 & = & \\ 0.75 \cdot 2^4 & + & 1.25 \cdot 2^4 & = & \\ (0.75 + 1.25) & * & 2^4 & = & \\ 1 & * & 2^5 & = & 32 \end{array}$$

Problem beim Angleichen der Exponenten:

Beispiel:

$$\begin{array}{ccccc} 1024 & + & \frac{1}{1048576} & = & \\ 1 \cdot 2^{10} & + & 1 \cdot 2^{-20} & = & \\ 1 \cdot 2^{10} & + & 2^{-30} \cdot 2^{10} & = & \\ 1 \cdot 2^{10} & + & 0 \cdot 2^{10} & = & 1024 \end{array}$$

Bei 23 Bits für die Mantisse ist 2^{-30} nicht mehr darstellbar.

Gleitkommaoperationen stoßen in Java keine Ausnahmebehandlung an. D.h., Division durch Null führt nicht zum Abbruch, sondern ergibt den Wert $+\infty$ bzw. $-\infty$; Null dividiert durch Null ergibt `NaN` (not a number).

Konstantenbezeichner

Beispiele:

```
.2
2
2.
2.0
2.538
2.538f
2.5E2
2.5E-2
```

$$\begin{array}{ccccc} 2.5E2 & = & 2.5 * 10^2 & = & 250 \\ 2.5E-2 & = & 2.5 * 10^{-2} & = & 0.025 \end{array}$$

```
/*************************  Gleitkomma.java  *********************************/

import AlgoTools.IO;

/**  Gleitkommaoperationen
 */

public class Gleitkomma {

  public static void main (String [] argv) {

    double summe, summand, pi, nenner, x;  // fuenf 64-Bit-Gleitkommazahlen

    IO.println("1/2 + 1/4 + 1/8 + ...");
    summe = 0.0; summand = 1.0;            // Initialisierungen
    while (summand > 0.0000000000001) {    // solange Summand gross genug
        summand = summand / 2.0;           // teile Summand
        summe   = summe + summand;         // erhoehe Summe
        IO.println(summe, 22, 16);         // drucke Summe auf insgesamt
    }                                      // 22 Stellen mit 16 Nachkommastellen

    IO.println("Naeherung von Pi :");
    pi = 4.0;                              // setze Naeherung auf 4
    nenner = 1.0;                          // setze nenner auf 1
    for (int i=1; i <= 100; i++) {         // tue 100 mal
        nenner += 2.0;                     // erhoehe nenner um 2
        summand = 4.0 / nenner;            // bestimme naechsten summand
        if (i%2 == 1) summand = -summand;  // abwechselnd positiv/negativ
        pi += summand;                     // addiere summand auf Naeherung
        IO.println( pi, 22, 16);           // drucke Naeherung auf insgesamt
                                           // 22 Stellen, 16 Nachkommastellen
    }

    IO.println("Ueberlaufdemo :");
    x = 1.0;                               // setze x auf 1
    while (x < Double.MAX_VALUE) {         // solange kleiner als Maximum
        x = x * 100.0;                     // verhundertfache x
       IO.println(x, 22);                  // drucke 22-stellig
    }                                      // druckt als letzten Wert Infinity

    IO.println( -1.0 / 0.0 );              // ergibt -Infinity
    IO.println(  0.0 / 0.0 );              // ergibt NaN (not a number)

  }
}
```

2.4.3 Boolean (`boolean`)

Der Typ `boolean` dient zum Speichern der logischen Werte wahr und falsch. Die einzigen Konstantenbezeichner lauten `true` und `false`.

Codierung

Mögliche Codierung in einem Byte:

$$\begin{array}{lcl} \texttt{false} & = & 0 \\ \texttt{true} & = & 1 \end{array}$$

Operatoren

`&&`	:	`boolean`	×	`boolean`	→	`boolean`	logisches Und mit verkürzter Auswertung
`||`	:	`boolean`	×	`boolean`	→	`boolean`	logisches Oder mit verkürzter Auswertung
`&`	:	`boolean`	×	`boolean`	→	`boolean`	logisches Und mit vollständiger Auswertung
`|`	:	`boolean`	×	`boolean`	→	`boolean`	logisches Oder mit vollständiger Auswertung
`^`	:	`boolean`	×	`boolean`	→	`boolean`	Exklusiv-Oder
`==`	:	`boolean`	×	`boolean`	→	`boolean`	Gleichheit
`!=`	:	`boolean`	×	`boolean`	→	`boolean`	Ungleichheit
`!`	:	`boolean`			→	`boolean`	Negation

P	Q	P && Q	P || Q	P ^ Q	!Q
false	false	false	false	false	true
false	true	false	true	true	false
true	false	false	true	true	
true	true	true	true	false	

Verkürzte Auswertung erfolgt von links nach rechts und bricht frühstmöglich ab:

```
while ((t > 0) && (n % t != b)) {
   t = t - 1;
}
```

De Morgan'sche Regeln:

```
!p && !q = !(p || q)
!p || !q = !(p && q)
```

2.4.4 Charakter (`char`)

Wertebereich: alle Zeichen im 16 Bit breiten Unicode-Zeichensatz.

Codierung

Jedes Zeichen wird codiert durch eine 2 Byte breite Zahl, z.B. der Buchstabe `A` hat die Nummer `65` (dezimal) = `00000000 01000001` (binär). Die niederwertigen 7 Bits stimmen mit dem ASCII-Zeichensatz (American Standard Code for Information Interchange) überein.

Zeichen-Literale werden zwischen zwei Apostrophen geschrieben, z.B. `'Q'` oder `'5'` oder `'?'`. Einige Sonderzeichen können durch eine Escape-Sequenz ausgedrückt werden.

Escape-Sequenz	Bedeutung	Codierung
	bell	7
`\b`	backspace	8
`\t`	horizontal tab	9
`\n`	newline	10
	vertical tab	11
`\f`	form feed	12
`\r`	carriage return	13
`\015`	Wagenrücklauf in Oktal-Schreibweise	13
`\u000D`	Wagenrücklauf in Hexadezimal-Schreibweise	13
`\"`	Anführungsstriche	34
`\'`	Apostroph	39
`\\`	backslash	92

Operatoren

`<, <=, ==, >=, >, != : char × char → boolean`

verlangen Ordnung auf dem Zeichensatz!

Es gilt `0 < 1 <...< 9 <...< A < B <...< Z <...< a < b <...< z < ...`

```
c = IO.readChar();
if (((’A’ <= c) && (c <= ’Z’)) ||
    (’a’ <= c) && (c <= ’z’)))
    IO.print ("Das Zeichen ist ein Buchstabe");
```

```
/*************************  Zeichen.java  ************************************/

import AlgoTools.IO;

/**  Umwandlung von Character zur Zahl
 *   Umwandlung von Zahl zum Character
 */

public class Zeichen {

  public static void main (String [] argv) {

    for (int i=0; i<=255; i++) {                // fuer den Latin-1-Zeichensatz
        IO.print(i,7);                          // drucke laufende Nummer
        IO.print( " " + (char) i );             // drucke zugehoeriges Zeichen
        if (i % 8 == 0) IO.println();           // nach 8 Zeichen neue Zeile
    }
    IO.println();

    char c;
    do {
        c = IO.readChar("Bitte ein Zeichen: "); // lies ein Zeichen ein
        IO.print("Der ASCII-Code lautet : ");   // gib den zugehoerigen
        IO.println((int) c,3);                  // ASCII-Code aus
    } while (c != 10 );                         // bis ein Newline kommt
  }
}
```

2.4.5 Typumwandlung

Der Typ eines Ausdrucks wird durch seine Bestandteile und die Semantik seiner Operatoren bestimmt. Grundsätzlich werden sichere, d.h. verlustfreie, Umwandlungen implizit, d.h. automatisch, ausgeführt. Konvertierungen, die ggf. verlustbehaftet sind, verlangen einen expliziten Cast-Operator.

Arithmetische Operationen auf ganzzahligen Werten liefern immer den Typ `int`, es sei denn, einer oder beide Operanden sind vom Typ `long`, dann ist das Ergebnis vom Typ `long`.

Die kleineren Integer-Typen `byte` und `short` werden vor einer Verknüpfung auf `int` umgewandelt. Character-Variablen lassen sich implizit konvertieren.

Ist ein Operand in Gleitkommadarstellung, so wird die Operation in Gleitkomma-Arithmetik durchgeführt. Gleitkommakonstanten ohne Suffix sind vom Typ `double` und erfordern eine explizite Typumwandlung (cast), wenn sie einer `float`-Variable zugewiesen werden.

```
/*************************  Ganzzahl.java  **********************************/

import AlgoTools.IO;

/**  Typumwandlung und Bitoperationen auf ganzen Zahlen
 */

public class Ganzzahl {

  public static void main (String [] argv) {

    byte b;                                 // ganze Zahl mit  8 Bit
    int  n;                                 // ganze Zahl mit 32 Bit

    b = -127;                               // setze b auf -127;
    n = b;                                  // implizite Typumwandlung
                                            // n hat nun den Wert -127
                                            // codiert auf 4 Bytes

    n = 130;                                // setze n auf 130
    b = (byte) n;                           // explizite Typumwandlung
    IO.println(b);                          // b hat nun den Wert -126
                                            // codiert auf einem Byte

    n = -2 ;                                // setze n auf -2
    b = (byte) n;                           // explizite Typumwandlung
    IO.println(b);                          // b hat nun den Wert -2
                                            // codiert auf einem Byte

    n = 1;                                  // initialisiere n
    while (n > 0) {                         // solange n positiv ist
        n = n * 10;                         // verzehnfache n
        IO.println(n, 20);                  // drucke n auf 20 Stellen
    }                                       // letzter Wert ist negativ !

    byte x=-127, y=126;
                                            // Obacht: jeweils cast auf int !
    IO.println( x & y  );                   // bitweise Und-Verknuepfung
    IO.println( x | y  );                   // bitweise Oder-Verknuepfung
    IO.println( x ^ y  );                   // bitweise XOR-Verknuepfung
    IO.println( ~x     );                   // bitweise Negation
    IO.println( x <<  6);                   // Linksshift
    IO.println( x >>  6);                   // Vorzeichen erhalt. Rechtsshift
    IO.println( x >>> 6);                   // Vorzeichen ignor.  Rechtsshift
  }                                         // d.h. Nullen nachschieben
}
```

```
/*************************  Umwandlung.java  *********************************/

import AlgoTools.IO;

/**  implizite und explizite Typumwandlungen zwischen einfachen Datentypen
 */


public class Umwandlung {

  public static void main (String [] argv) {

    char   c = '?';                  // das Fragezeichen
    byte   b = 100;                  // ca.  3 Stellen
    short  s = 10000;                // ca.  5 Stellen
    int    i = 1000000000;           // ca.  9 Stellen
    long   l = 100000000000000000L;  // ca. 18 Stellen
    float  f = 3.14159f;             // ca.  6 Stellen Genauigkeit
    double d = 3.14159265358979;     // ca. 15 Stellen Genauigkeit

    i = s ;                          // implizite Typumwandlung ohne Verlust
    i = c ;                          // implizite Typumwandlung ohne Verlust
    s = (short) c;                   // explizite Typumwandlung ohne Verlust
    s = (short) i;                   // explizite Typumwandlung  mit Verlust
    d = i;                           // implizite Typumwandlung ohne Verlust
    i = (int) d;                     // explizite Typumwandlung  mit Verlust

    d = f;                           // implizite Typumwandlung ohne Verlust
    f = (float) d;                   // explizite Typumwandlung  mit Verlust

    d = 1/2;                         // ergibt 0 wegen ganzzahliger Division
    IO.println(d);
    d = 1/2.0;                       // ergibt 0.5 wegen Gleitkommadivision
    IO.println(d);

    IO.println(2 * b + c );          // Ausdruck ist vom Typ int, Wert = 263
    IO.println(i + 1.5);             // Ausdruck ist vom Typ double
  }
}
```

2.4.6 Konstanten

Benannte Konstanten können innerhalb einer Klasse zur Verbesserung der Lesbarkeit benutzt werden. Sie werden bei der Deklaration mit dem Attribut `final` markiert und erhalten ihren nicht mehr änderbaren Wert zugewiesen.

```
/*************************  Konstanten.java  *********************************/

import AlgoTools.IO;

/**  Einsatz von Konstanten fuer ganze Zahlen, Gleitkomma und Character
 */


public class Konstanten {

  public static void main (String [] argv) {

    final int    MAX_GRAD = 360;               // Integer-Konstante
    final double PI       = 3.141592653589793; // Double Konstante
    final char   PIEP     = 7;                 // Character-Konstante

    int grad;
    double r;

    IO.print(PIEP);                            // erzeuge Piep

    for (grad=0; grad <= MAX_GRAD; grad++) {   // fuer jeden ganzzahligen Winkel
        r = Math.sin (grad * PI / 180);        // berechne Sinus vom Bogenmass
        IO.println(grad + " " + r);            // gib Winkel und Sinus aus
    }
  }
}
```

Kapitel 3

Felder

Mehrere Daten desselben Typs können zu einem Feld (Array) zusammengefasst werden.

```
/***************************  Feld.java  *************************************/

import AlgoTools.IO;

/**  Zusammenfassung mehrerer Daten desselben Typs zu einem Feld
 */

public class Feld {

  public static void main (String [] argv) {

    double[] a;                                   // eindimensionales double-Feld
    int i, j;                                     // Laufvariablen

    a = new double[8];                            // besorge Platz fuer 8 Double

    for (i=0; i < a.length; i++)                  // durchlaufe das Feld
        IO.println(a[i]);                         // drucke jedes Feldelement

    double[][] mat = new double[4][3];            // 4x3 Matrix vom Typ double

    for (i=0; i<mat.length; i++) {                // durchlaufe jede Zeile
        for (j=0; j < mat[i].length; j++)         // durchlaufe die Spalten
            IO.print(mat[i][j], 8, 2);            // drucke Matrixelement
        IO.println();                             // gehe auf neue Zeile
    }

    int[][] diagonal = {{1}, {2,3}, {4,5,6}};     // untere linke Dreiecksmatrix
  }
}
```

3.1 Feld von Ziffern

```
/***************************  Ziffern.java  ***********************************/

import AlgoTools.IO;

/**  Erwartet eine Folge von Ziffern
 *   und berechnet den zugehoerigen Wert.
 */

public class Ziffern {

  public static void main (String [] argv) {

    char[] zeile;                           // Array fuer Zeile
    char c;                                 // Character-Variable

    int i = 0, wert = 0, ziffernwert;       // Hilfsvariablen

    zeile = IO.readChars("Bitte Ziffernfolge: "); // Liest so lange Zeichen von
                                            // der Tastatur, bis <Return>
    i = 0;
    while (i < zeile.length)   {            // solange Zeile nicht erschoepft
        c = zeile[i];                       // besorge naechstes Zeichen
        ziffernwert = (int) c - (int) '0';  // konvertiere Ziffer zur Zahl
        wert = 10*wert + ziffernwert;       // verknuepfe mit bisherigem Wert
        i++;
    }
    IO.println("Der Wert lautet " + wert);  // gib Wert aus
  }
}
```

3.2 Feld von Daten

```
/***************************  Matrix.java  ************************************/

import AlgoTools.IO;

/** Multiplikation zweier NxN-Matrizen (ohne Ein- und Ausgabe)
 *
 *       c[i][j]  :=  Summe {k=0 bis N-1}  ( a[i][k] * b[k][j] )
 */

public class Matrix {

  public static void main (String [] argv) {

    final int N = 4;                      // Zeilen- und Spaltenzahl

    double[][] c = new double[N][N];      // eine 4x4 Matrix mit Speicherplatz

    double[][] a = {{  1,  2,  3,  4},    // eine initialisierte 4x4 Matrix
                    {  5,  6,  7,  8},
                    {  9, 10, 11, 12},
                    { 13, 14, 15, 16}};

    double[][] b = {{ 17, 18, 19, 20},    // eine initialisierte 4x4 Matrix
                    { 21, 22, 23, 24},
                    { 25, 26, 27, 28},
                    { 29, 30, 31, 32}};


    int i, j, k;                          // Laufindizes
    double summe;                         // Zwischensumme


    for (i = 0; i < N; i++)               // Zeilenindex
        for (j = 0; j < N; j++) {         // Spaltenindex
            summe = 0.0;
            for (k = 0; k < N; k++)       // verknuepft werden alle Komponenten
                summe += a[i][k]*b[k][j]; // von Zeile i und Spalte j
            c[i][j] = summe;              // die Produktsumme steht in c[i,j]
        }
  }
}
```

3.3 Feld von Zeichen

```
/***************************  Zeichenkette.java  ******************************/

import AlgoTools.IO;

/**  Interpretiert zwei eingelesene Zeichenfolgen als Strings
 *   und vergleicht sie.
 */

public class Zeichenkette {

  public static void main (String [] argv) {

    char[] s, t;                          // Felder von Zeichen
    int i;                                // Laufindex

    s = IO.readChars("Bitte einen String: ");
    t = IO.readChars("Bitte einen String: ");

    i = 0;

    IO.print(s);

    while (true) {                        // s und t gelten so lange als gleich,
                                          // bis ein String zu Ende ist oder
                                          // zwei Buchstaben sich unterscheiden

      if ((i==s.length) && (i==t.length)) { IO.print(" = "); break;}
      if ( i==s.length)                   { IO.print(" < "); break;}
      if ( i==t.length)                   { IO.print(" > "); break;}
      if ( s[i] < t[i])                   { IO.print(" < "); break;}
      if ( s[i] > t[i])                   { IO.print(" > "); break;}

      i++;
    }

    IO.println(t);
  }
}
```

3.4 Feld von Wahrheitswerten

```
/***************************  Sieb.java  *************************************/

import AlgoTools.IO;

/**  Sieb des Eratosthenes zur Ermittlung von Primzahlen.
 *   Idee: Streiche alle Vielfachen von bereits als prim erkannten Zahlen.
 */

public class Sieb {

  public static void main (String [] argv) {

    boolean[] sieb;                           // boole'sches Array
    int i, j, n;                              // Laufvariablen

    n = IO.readInt("Bitte Primzahlgrenze: "); // fordere Obergrenze an
    sieb = new boolean[n];                    // allokiere Speicherplatz

    for (i = 2; i < n; i++) sieb[i] = true;   // alle sind zunaechst Primzahl

    for (i = 2; i < n; i++)
        if (sieb[i]) {                        // falls i als Primzahl erkannt,
            IO.print(i,6);                    // gib sie aus, und
            for (j = i+i; j < n; j += i)      // fuer alle Vielfachen j von i
                sieb[j] = false;              // streiche j aus der Liste
        }
  }
}
```

3.5 Feld von Indizes

```
/*************************  ArrayAbzaehlreim.java  **************************/

import AlgoTools.IO;

/**  n Kinder stehen im Kreis, jedes k-te wird abgeschlagen.
 *   Die Kreisordnung wird organisiert durch Array mit Indizes der Nachfolger.
 */

public class ArrayAbzaehlreim {

  public static void main (String [] argv) {

    int[] next;                             // Array mit Indizes
    int i, index, n, k;                     // Laufvariablen

    n = IO.readInt("Wie viele Kinder ? "); // fordere Zahl der Kinder
    k = IO.readInt("Wie viele Silben ? "); // fordere Zahl der Silben an
    next = new int [n];                     // allokiere Platz fuer Index-Array

    for (i = 0; i < n; i++)                 // initiale Aufstellung
        next[i] = (i+1) % n;

    index = n-1;                            // index zeigt auf das Kind vor
                                            // dem ausgezeichneten Kind

    while (next[index] != index) {          // so lange abschlagen, bis jemand
                                            // sein eigener Nachfolger ist
        for (i=1; i< k; i++)                // gehe k-1 mal
            index = next[index];            // zum jeweiligen Nachfolger

        IO.print("Ausgeschieden: ");        // gib den Index des ausgeschiedenen
        IO.println(next[index],5);          // naechsten Nachfolgers aus

        next[index] = next[next[index]];    // setze Index auf neuen Nachfolger
    }
    IO.println("Es bleibt uebrig: " + index);
  }
}
```

3.6 Feld von Zuständen

Ein *endlicher Automat* A ist ein 5-Tupel $A = (S, \Sigma, \delta, s_0, F)$ mit

$$\begin{array}{lcl} S & = & \text{endliche Zustandsmenge} \\ \Sigma & = & \text{endliches Eingabealphabet} \\ \delta : S \times \Sigma \to S & = & \text{Überführungsfunktion} \\ s_0 \in S & = & \text{Anfangs- oder Startzustand} \\ F \subseteq S & = & \text{Endzustände} \end{array}$$

Ein Wort $w \in \Sigma^*$ wird akzeptiert, falls

$$\delta^*(s_0, w) \in F$$
$$\delta^*(s_0, x_0 x_1 x_2 \ldots x_k) = \delta(\ldots \delta(\delta(\delta(s_0, x_0), x_1), x_2) \ldots x_k).$$

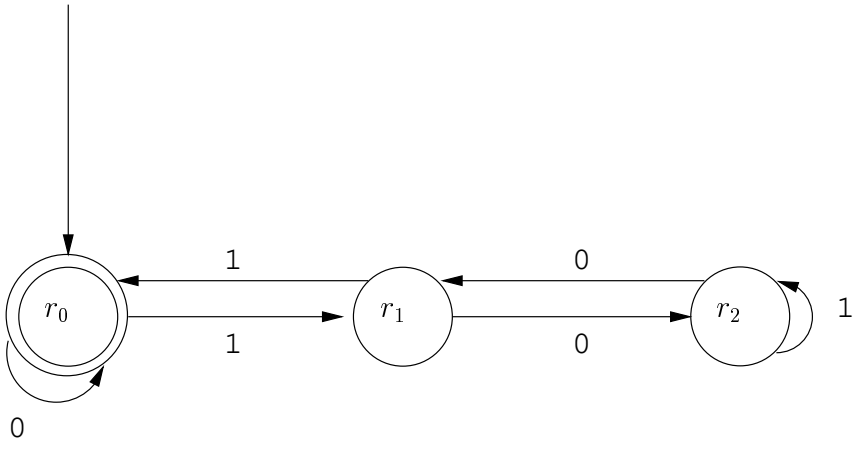
Die Wirkungsweise der Überführungsfunktion δ kann durch einen Zustandsüberführungsgraphen beschrieben werden. In diesem Graphen führt eine mit x beschriftete Kante von Knoten a zu Knoten b, falls gilt: $\delta(a, x) = b$.

Beispiel:

A soll durch 3 teilbare Dualzahlen erkennen.

$S = \{r_0, r_1, r_2\}$
$\Sigma = \{$`'0', '1'`$\}$
Startzustand ist r_0
$F = \{r_0\}$

Die Knoten r_0, r_1 und r_2 charakterisieren die Zustände, wenn der Rest der Division durch 3 0, 1 bzw. 2 beträgt. An der Kante steht das jeweils vorderste Bit der Dualzahl, die von links nach rechts abgearbeitet wird.



```
/***************************  Automat.java  ***********************************/

import AlgoTools.IO;

/**  Endlicher Automat mit delta : Zustand x Eingabe -> Zustand.
 *   Ueberprueft, ob der eingegebene Binaerstring durch 3 teilbar ist.
 *   Syntaktisch korrekte Eingabe wird vorausgesetzt.
 *   Zeichen '0' und '1' werden umgewandelt in Integer 0 bzw. 1.
 */

public class Automat {

  public static void main (String [] argv) {

    int[][] delta = {{0,1}, {2,0}, {1,2}};             // Ueberfuehrungsfunktion

    int z = 0;                                         // Zustand

    char[] zeile=IO.readChars("Bitte Binaerstring: "); // fordere Eingabe an

    for (int i=0; i < zeile.length; i++)               // fuer jedes Zeichen
        z = delta[z][zeile[i] - (int) '0'];            // berechne Folgezustand

    IO.println("Ganzzahliger Rest betraegt " + z);     // Gib Ergebnis bekannt
  }
}
```

3.7 Lineare und binäre Suche

```
/***************************  Suche.java  ************************************/
import AlgoTools.IO;

/**  lineare Suche eines Wertes und des Minimums im Array
 *   und binaere Suche im geordneten Array
 */

public class Suche {

  public static void main (String [] argv) {

    int[] a;                                          // Feld fuer Zahlenfolge
    int i, x, min, index, links, rechts, mitte;

    a = IO.readInts("Bitte Zahlenfolge:      ");
    x = IO.readInt ("Bitte zu suchende Zahl: ");
                                                      // lineare Suche n. Element
    for (i=0; (i < a.length) && (x != a[i]); i++);    // durchlaufe Folge
    if (i==a.length) IO.println("Nicht gefunden");    // gib Suchergebnis bekannt
    else             IO.println("Gefunden an Position " + i);
                                                      // lineare Suche n. Minimum
    min = a[0]; index = 0;                            // Minimum ist erster Wert
    for (i = 1; i < a.length; i++){                   // durchlaufe gesamte Folge
        if (a[i] < min) {                             // falls neues Minimum
            index = i;                                // merke Position
            min   = a[i];}                            // und Wert des Minimums
    } IO.println("Minimum = " + min + " an Position " + index);

    a = IO.readInts("Bitte sortierte Zahlenfolge: ");// binaere Suche n. Element
    x = IO.readInt ("Bitte zu suchende Zahl:      ");// in sortierter Folge
    mitte = links = 0;                                // initialisiere links
    rechts = a.length-1;                              // initialisiere rechts
    while (links <= rechts) {                         // solange nichtleeres Int.
        mitte = (links + rechts) / 2;                 // berechne Mitte
        if (a[mitte] == x) break;                     // richtig gesprungen
        if (a[mitte] < x)  links  = mitte+1;          // zu kurz gesprungen
        else               rechts = mitte-1;          // zu weit gesprungen
    }
    if (links > rechts) IO.println("Nicht gefunden");
    else IO.println("Gefunden an Position " + mitte);
  }
}
```

Analyse der Laufzeit der linearen Suche

Beh.: Die Anzahl der Vergleiche beträgt im ungünstigsten Fall n und im Durchschnitt $\frac{n}{2}$.

Analyse der Laufzeit der binären Suche

Beh.: In einem Schleifendurchlauf schrumpft ein Intervall der Länge $2^k - 1$ auf ein Intervall der Länge $2^{k-1} - 1$.

Beweis:

Sei Länge vom alten Intervall =

$$\begin{array}{lll} & 2^k - 1 & = \text{ rechts } - \text{ links } + 1 \\ \Rightarrow & 2^k & = \text{ rechts } - \text{ links } + 2 \\ \Rightarrow & 2^{k-1} & = \frac{\text{rechts} - \text{links}}{2} + 1 \\ \Rightarrow & 2^{k-1} - 1 & = \frac{\text{rechts} - \text{links}}{2} = \frac{\text{rechts} + \text{rechts} - \text{links} - \text{rechts}}{2} \\ & & = \text{ rechts } - (\frac{\text{links} + \text{rechts}}{2} + 1) + 1 \\ & & = \text{ neue Intervalllänge im } \texttt{THEN}\text{-Zweig} \end{array}$$

Korollar: $2^k - 1$ Zahlen verursachen höchstens k Schleifendurchläufe, da nach k Halbierungen die Intervallänge 1 beträgt.

Beispiel für eine Folge von 31 sortierten Zahlen:

Schleifendurchlauf	1	2	3	4	5
aktuelle Intervalllänge	$2^5 - 1$ $= 31$	$2^4 - 1$ $= 15$	$2^3 - 1$ $= 7$	$2^2 - 1$ $= 3$	$2^1 - 1$ $= 1$

Anders formuliert:
n Zahlen verursachen höchstens $\log_2 n$ Schleifendurchläufe. @

Kapitel 4

Klassenmethoden

Häufig benutzte Algorithmen werden zu so genannten *Methoden* zusammengefasst, die unter Nennung ihres Namens und ggf. mit Übergabe von aktuellen Parametern aufgerufen werden.

Methoden sind entweder objektbezogen (siehe später) oder klassenbezogen. Klassenbezogene Methoden werden durch das Schlüsselwort `static` deklariert und können innerhalb oder außerhalb derselben Klasse aufgerufen werden. Die Zugriffsrechte werden über sogenannte *Modifier* geregelt: Durch den Modifier `private` wird der Zugriff nur von der eigenen Klasse ermöglicht, durch den Modifier `public` darf von einer beliebigen anderen Klasse zugegriffen werden.

Gibt eine Methode einen Wert zurück, so steht sein Typ vor dem Methodennamen, andernfalls steht dort `void`. Als Aufrufmechanismus wird *call-by-value* verwendet, d.h., ein im Methodenrumpf benutzter formaler Parameter wird bei Methodenaufruf mit dem Wert des aktuellen Parameters versorgt.

Innerhalb einer Methode verdecken formale Parameter und lokale Variablen gleich lautende Identifier aus der umschließenden Klasse.

Eine mit dem Schlüsselwort `static` versehene Deklaration einer Klassenvariablen führt eine klassenbezogene Variable ein, welche global in allen Methoden dieser Klasse sichtbar ist.

Methoden können überladen werden durch verschiedene Parametersätze.

```
/***************************  Methoden.java  **********************************/

import AlgoTools.IO;

/**  Klassen-Methoden
 *   mit und ohne formale Parameter
 *   mit und ohne Rueckgabewert
 */

public class Methoden {

                                                // Methode ohne Rueckgabewert
  public static void bitte() {                  // und ohne Parameter
    IO.println("Bitte Eingabe: ");
  }

                                                // Methode ohne Rueckgabewert
  public static void sterne(int k) {            // mit einem Integer-Parameter
    int i;                                      // lokale Variable
    for (i=0; i < k; i++)                       // zeichne k Sterne
        IO.print('*');
    IO.println();
  }

                                                // Methode mit Rueckgabewert
  public static int hoch(int a, int b) {        // und zwei Integer-Parametern
    int i, h = 1;                               // lokale Variablen
    for (i=0; i < b; i++) h *= a;               // berechne a hoch b
    return h;                                   // liefere Ergebnis ab
  }

                                                // Methode mit Rueckgabewert
  public static int ggt(int a, int b) {         // zwei Integer-Parameter
    while (a != b)                              // solange Zahlen verschieden
        if (a > b) a -= b; else b -= a;         // ziehe kleinere von groesserer ab
    return a;                                   // liefere Ergebnis zurueck
  }                                             // aktuelle Parameter unveraendert

                                                // Methode ohne Rueckgabewert
  public static void main (String [] argv) {  // oeffentlich aufrufbar
    bitte();                                    // rufe bitte auf
    sterne(3*5+7);                              // rufe sterne auf
    IO.println("3 hoch 7 ist " + hoch(3,7)); // rufe hoch auf
    IO.println("ggt(28,12) = " + ggt(28,12));// rufe ggt auf
  }
}
```

```
/***************************  Parameter.java  *********************************/

import AlgoTools.IO;

/**  Uebergabe von Arrays an Methoden
 */

public class Parameter {
                                                  // Methode ohne Rueckgabewert
  public static void zeige(int[] a) {             // erhaelt Array als Parameter
    for (int i=0; i < a.length; i++)              // gibt Array aus
        IO.print(a[i],5);
    IO.println();
  }
                                                  // Methode mit Rueckgabewert
  public static int summe(int[] a) {              // erhaelt Array als Parameter
    int s = 0;                                    // initialisiert Summe
    for (int i=0; i< a.length; i++)               // durchlaeuft Array
        s = s + a[i];                             // berechnet Summe
    return s;                                     // und liefert sie zurueck
  }
                                                  // Methode mit Rueckgabewert
  public static int[] kopiere(int[] a) {          // erhaelt Array als Parameter
    int[] b = new int[a.length];                  // besorgt Platz fuer 2. Array
    for (int i=0; i<a.length; i++)                // durchlaeuft Array a
        b[i] = a[i];                              // kopiert es nach b
    return b;                                     // liefert b zurueck
  }
                                                  // Methode mit Seiteneffekt
  public static void reset(int[] a) {             // erhaelt Array als Parameter
    for (int i=0; i < a.length; i++)              // durchlaeuft Array
        a[i] = 0;                                 // und setzt jede Komponente auf 0
  }

  public static void main(String [] argv) {   // erhaelt Strings als Parameter
    int[] folge = {1,4,9,16,25,36};               // deklariere initialisierte Folge
    int[] noch_eine_folge;                        // deklariere leere Folge
    zeige(folge);                                 // gib folge aus
    IO.println("Summe = " + summe(folge));       // gib die Summe aus
    noch_eine_folge = kopiere(folge);             // schaffe eine Kopie der Folge
    zeige(noch_eine_folge);                       // gib Kopie aus
    reset(folge);                                 // setze folge auf 0
    zeige(folge);                                 // gib folge aus
  }
}
```

```
/***************************  Sichtbarkeit.java  ******************************/

import AlgoTools.IO;

/** Sichtbarkeit und Lebensdauer von Variablen.
 *  Ueberladen von Methoden.
 */

public class Sichtbarkeit {

  private static int grenze;              // globale Variable in dieser Klasse
  private static int i = 100;             // globale Varibale in dieser Klasse
  public static void setze() {            // Methode ohne Parameter
    int i = 42;                           // lokales i, verschieden von glob. i
    grenze = i;                           // setze globale grenze auf 42
  }


  public static void setze(int a) {       // Methode mit Parameter
    grenze = a;                           // setze globale Variable
  }                                       // durch uebergebenen Parameter


  public static void zeichne() {          // Methode ohne Parameter
    for (int i=0; i < grenze; i++)        // lokale Variable laeuft bis
        IO.print('*');                    // zum Wert der globalen Variablen
    IO.println();
  }


  public static int hole() {              // Methode ohne Parameter
    return grenze;                        // liefert momentanen Wert von grenze
  }


  public static void main(String [] argv){ // Methode mit Parameter
    setze();                              // setze globale Variable
    zeichne();                            // nutze globale Variable
    setze(4711);                          // setze globale Variable
    IO.println("Grenze = " + hole());     // hole  globale Variable
  }
}
```

Kapitel 5

Rekursion

Eine Methode (mit oder ohne Rückgabewert, mit oder ohne Parameter) darf in der Deklaration ihres Rumpfes den eigenen Namen verwenden. Hierdurch kommt es zu einem rekursiven Aufruf. Typischerweise werden dabei die aktuellen Parameter so modifiziert, dass die Problemgröße schrumpft, damit nach mehrmaligem Wiederholen dieses Prinzips schließlich kein weiterer Aufruf erforderlich ist und die Rekursion abbrechen kann.

5.1 Fakultät, Potenzieren, Fibonacci, GGT

```
/***************************  Rekursion.java  *********************************/

import AlgoTools.IO;

/** Rekursive Methoden                                                        */

public class Rekursion {

  static int fakultaet (int n) {          //
    if (n == 0)                           //
        return 1;                         //           1         falls n=0
    else                                  //  n! :=
        return n * fakultaet(n-1);        //           n*(n-1)!  sonst
  }

  static int zweihoch (int n) {           //
    if (n == 0)                           //           1         falls n=0
        return 1;                         //   n
    else                                  //  2   :=      (n-1)
        return 2*zweihoch(n-1);           //           2*2       sonst
  }

  static int fib (int n){                 // Jedes Kaninchenpaar bekommt vom
    if (n <=1 )                           // 2. Jahr an ein Paar als Nachwuchs
        return 1;                         //
    else                                  // Jahr     0  1  2  3  4  5  6  7  8
        return fib(n-1) + fib(n-2);       // Paare    1  1  2  3  5  8 13 21 34
  }                                       //

  static int ggt (int x, int y) {         //
    if (y == 0)                           //
        return x;                         //             x          falls y=0
    else                                  // ggt(x,y) :=
        return ggt(y, x % y);             //             ggt(y,x%y) sonst
  }

  public static void main (String [] argv) {
    int[] a = IO.readInts("Bitte zwei Zahlen: ", 2);
    IO.println(a[0] + " ! =  " + fakultaet(a[0]));
    IO.println("2 hoch " + a[0] + " = " + zweihoch(a[0]));
    IO.println(a[0] + ". Fibonacci-Zahl = " + fib(a[0]));
    IO.println("ggt(" + a[0] + "," + a[1] + ") = " + ggt(a[0],a[1]));
  }
}
```

5.2 Türme von Hanoi

```
/***************************  Hanoi.java  ************************************/

import AlgoTools.IO;

/**  Tuerme von Hanoi:
 *   n Scheiben mit abnehmender Groesse liegen auf dem Startort A.
 *   Sie sollen in derselben Reihenfolge auf Zielort C zu liegen kommen.
 *   Die Regeln fuer den Transport lauten:
 *   1.) Jede Scheibe muss einzeln transportiert werden.
 *   2.) Es darf nie eine groessere Scheibe auf einer kleineren liegen.
 *   3.) Es darf ein Hilfsort B zum Zwischenlagern verwendet werden.
 */

//            |                        |                        |
//           x|x                       |                        |
//          xx|xx                      |                        |
//         xxx|xxx                     |                        |
//        xxxx|xxxx                    |                        |
//     ---------------          ---------------          ---------------
//         Start (A)               Zwischen (B)                Ziel (C)

public class Hanoi {

  static void verlege (           // drucke die Verlegeoperationen, um
    int n,                        // n Scheiben
    char start,                   // vom Startort
    char zwischen,                // unter Zuhilfenahme eines Zwischenortes
    char ziel) {                  // zum Ziel zu bringen

    if (n>0) {
        verlege(n-1,start, ziel, zwischen);
        IO.println("Scheibe " + n +" von " + start + " nach " + ziel);
        verlege(n-1,zwischen, start, ziel);
    }
  }

  public static void main (String [] argv) {
    int n;
    do{ n = IO.readInt("Bitte Zahl der Scheiben (n>0): "); } while (n <= 0);
    verlege(n,'A','B','C');
  }
}
```

Analyse der Größe der erzeugten Ausgabe:

Sei $f(n)$ die Anzahl der generierten Verlegebefehle bei Aufruf von

```
verlege (n, start, zwischen, ziel).
```

Offenbar:
$$\begin{aligned} f(1) &= 1 \\ f(n) &= f(n-1) + 1 + f(n-1) \quad = \quad 2 \cdot f(n-1) + 1 \end{aligned}$$

d.h., die Wertetabelle beginnt wie folgt:

n	$f(n)$
1	1
2	3
3	7
4	15
5	31
6	63

Verdacht: $f(n) = 2^n - 1$

Beweis durch Induktion

Induktionsverankerung: $f(1) = 1 = 2^1 - 1$

Induktionsschritt: Sei bis $n - 1$ bewiesen:

$$f(n) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Rekursionsgleichung}}}{=} 2 \cdot f(n-1) + 1 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Induktionsannahme}}}{=} 2 \cdot (2^{n-1} - 1) + 1 = 2^n - 2 + 1 = 2^n - 1$$

Kapitel 6

Komplexität und Verifikation

Nicht:	absolute CPU-Zeit angeben
Nicht:	Anzahl der Maschinenbefehle zählen
Sondern:	Wachstum der Laufzeit in "Schritten" in Abhängigkeit
	von der Größe der Eingabe
	= Länge ihrer Codierung
	= Anzahl der Daten beschränkter Größe oder Länge der Darstellung einer Zahl

6.1 O-Notation

Seien $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

f ist höchstens von der Größenordnung g

in Zeichen: $f \in O(g)$

falls $n_0,\ c \in \mathbb{N}$ existieren mit

$$\forall\, n \geq n_0 :\ f(n) \leq c \cdot g(n)\,.$$

Statt $f \in O(g)$ sagt man auch $f = O(g)$

$\Rightarrow$ Wegen des konstanten Faktors c ist die exakte Festlegung eines Schrittes nicht erforderlich.

Beispiel:

Sei $f(n) = 31n + 12n^2$.

Dann ist $f \in O(n^2)$

Natürlich gilt auch: $f \in O(n^7)$

Die wesentlichen Klassen

$\log n$	n	$n \cdot \log n$	n^2	n^3	n^4	...	2^n	3^n	$n!$
↑	↑	↑	↑	↑			↑		↑
binäre Suche	lineare Suche	schlaues Sortieren	dummes Sortieren	Gleichungs-system lösen			alle Teil-mengen		alle Permu-tationen

Annahme: 1 Schritt dauert 1 μs = 0.000001 s

$n =$	10	20	30	40	50	60
n	10 μs	20 μs	30 μs	40 μs	50 μs	60 μs
n^2	100 μs	400 μs	900 μs	1.6 ms	2.5 ms	3.6 ms
n^3	1 ms	8 ms	27 ms	64 ms	125 ms	216 ms
2^n	1 ms	1 s	18 min	13 Tage	36 J	366 Jh
3^n	59 ms	58 min	6.5 J	3855 Jh	10^8 Jh	10^{13} Jh
$n!$	3.62 s	771 Jh	10^{16} Jh	10^{32} Jh	10^{49} Jh	10^{66} Jh

Für einen Algorithmus mit Laufzeit $O(2^n)$ gilt daher:

Wächst n um 1, so wächst 2^n um den Faktor 2.
Wächst n um 10, so wächst 2^n um den Faktor $2^{10} = 1024$.
Ein 1000-mal schnellerer Computer kann eine um 10 Daten größere Eingabe in derselben Zeit bearbeiten.

Analoge Aussagen sind möglich bzgl. Speicherplatz.
Wir zählen nicht die Anzahl der Bytes, sondern betrachten das Wachstum des Platzbedarfs in Speicherplätzen in Abhängigkeit von der Größe der Eingabe.

Aussagen über *Laufzeit* und *Platzbedarf* beziehen sich auf

- *best case* günstigster Fall
- *worst case* ungünstigster Fall
- *average case* im Mittel

Analyse von `for`-Schleifen

Beispiel:

Minimumsuche in einem Array der Länge n

```
min = a[0];
for (i = 1; i < n; i++){
        if(a[i] < min) min = a[i];
}
```

Laufzeit $O(n)$ für best case
worst case
average case.

Beispiele:

```
for (i = 0; i < k; i++) {
   for (j = 0; j < k; j++) {
      brett[i][j] = 0;
   }
}
```

k^2 Schritte für k^2 Daten
$\Rightarrow O(n)-$Algorithmus

```
for (i = 0, i < k; i++) {
   for (j = 0; j < k; j++) {
      if (a[i] == a[j]) treffer = true;
   }
}
```

k^2 Schritte für k Daten
$\Rightarrow O(n^2)-$Algorithmus

Analyse von `while`-Schleifen

Beispiel:

Lineare Suche im Array

```
i = 0;
while (i < n) && (a[i] != x) {
   i++;
}
```

Laufzeit:	best case	1 Schritt	$\Rightarrow$	$O(1)$
	worst case	n Schritte	$\Rightarrow$	$O(n)$
	average case	$\frac{n}{2}$ Schritte	$\Rightarrow$	$O(n)$

Annahme für den average case:
Es liegt Permutation der Zahlen von 1 bis n vor.
Dann ist die mittlere Anzahl

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i \quad \approx \quad \frac{n}{2}$$

Beispiel:

Suche 0 in einem Array, bestehend aus Nullen und Einsen.

Laufzeit:	best case	1 Schritt	$\Rightarrow$	$O(1)$
	worst case	n Schritte	$\Rightarrow$	$O(n)$
	average case	$\sum_{i=1}^{n} i \cdot \frac{1}{2^i} \leq 2$	$\Rightarrow$	$O(1)$

Obacht:

Alle Laufzeitangaben beziehen sich jeweils auf einen konkreten Algorithmus A (für ein Problem P) = *obere Schranke* für Problem P.

Eine Aussage darüber, wie viele Schritte jeder Algorithmus für ein Problem P mindestens durchlaufen muss, nennt man *untere Schranke* für Problem P.

Beispiel: naives Pattern-Matching

```
char[] s = new char[N];                                  // Zeichenkette
char[] p = new char[M];                                  // Pattern
```

Frage: Taucht Pattern p in Zeichenkette s auf?

```
for (i = 0; i <= N - M; i++) {                           // Index in Zeichenkette
   for (j = 0; (j < M) && (p[j] == s[i+j]); j++);        // Index im Pattern
   if (j == M) break;                                    // Erfolg
}
```

Laufzeit best case: $O(1)$
Laufzeit worst case: $(N - M + 1) \cdot M$ Vergleiche für $s = AAA \ldots AB$, $p = A \ldots AB$

Sei n die Summe der Buchstaben in Pattern p und String s. Sei $M = x \cdot n$ und $N = (1 - x) \cdot n$ für $0 < x < 1$.

Gesucht wird x, welches $((1 - x) \cdot n - x \cdot n + 1) \cdot x \cdot n = (n^2 + n) \cdot x - 2n^2 \cdot x^2$ maximiert.

Bilde 1. Ableitung nach x und setze auf 0: $0 = n^2 + n - 4n^2 \cdot x$

$\Rightarrow$ Maximum liegt bei $\frac{n^2 + n}{4n^2} \approx \frac{1}{4}$

Also können $(\frac{3}{4}n - \frac{1}{4}n + 1) \cdot \frac{1}{4}n = \frac{1}{8}n^2 + \frac{1}{4}n$ Vergleiche entstehen.

$\Rightarrow$ Die Laufzeit im worst case beträgt $O(n^2)$.

Analyse eines rekursiven Programms

Beispiel:

Die Laufzeit von $fib(n)$ beträgt:

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{falls } n \leq 1 \\ f(n-1) + f(n-2) + 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Offenbar gilt: $f \in O(\alpha^n)$ für ein $\alpha < 2$ (denn $f(n) = f(n-1) + f(n-1)$ würde zu $O(2^n)$ führen).

Gesucht ist also ein α, so dass für große n gilt:

$$\alpha^n = \alpha^{n-1} + \alpha^{n-2} + 1$$

Teile durch α^{n-2}:

$\Rightarrow$ $\alpha^2 = \alpha + 1 + \frac{1}{\alpha^{n-2}}$. Für $n \to \infty$ und $\alpha > 1$ geht $\frac{1}{\alpha^{n-2}} \to 0$.

$\Rightarrow$ $\alpha^2 = \alpha + 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = 1.61803$ (gemäß Formel $-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$)

$\Rightarrow$ Das rekursive Fibonacci-Programm hat die Laufzeit $O(1.62^n)$, wobei n der Wert des Inputs ist, nicht seine Länge!

für $n = 20$ ist $1.62^n \approx 15.000$
$2^n \approx 1.000.000$.

6.2 Korrektheit und Terminierung

Durch *Testen* kann nachgewiesen werden, dass sich ein Programm für **endlich viele** Eingaben korrekt verhält. Durch eine *Verifikation* kann nachgewiesen werden, dass sich ein Programm für **alle** Eingaben korrekt verhält.

Bei der *Zusicherungsmethode* sind zwischen den Statements so genannte *Zusicherungen* eingestreut, die eine Aussage darstellen über die momentane Beziehung zwischen den Variablen.

Syntaktisch lassen sich diese Zusicherungen am einfachsten als Kommentare formulieren.

Z.B. `/*` $i > 0 \wedge z = i^2$ `*/`

Aus einer Zusicherung und der folgenden Anweisung lässt sich dann eine weitere Zusicherung ableiten:

```
i = i - 1;
```
$\Rightarrow$ `/*` $i \geq 0 \ \wedge z = (i+1)^2$ `*/`

Bei Schleifen wird die Zusicherung P, die vor Eintritt und vor Austritt gilt, die *Schleifeninvariante* genannt.

```
/* P */
while Q {
   /* P ∧ Q */
   ⋮
   ⋮
   /* P */
}
/* P ∧ ¬Q */
```

Beginnend mit einer ersten, offensichtlich richtigen Zusicherung, lässt sich als letzte Zusicherung eine Aussage über das berechnete Ergebnis ableiten = *partielle Korrektheit*.

Zusammen mit dem Nachweis der *Terminierung* ergibt sich die *totale Korrektheit*.

Beispiel für die Zusicherungsmethode:

```
int n, x, y, z;
do { n = IO.readInt(); } while (n < 0);
/* n ≥ 0 */
x = 0; y = 1; z = 1;
/* (z = (x+1)^2 ∧ y = 2x+1 ∧ x^2 ≤ n) = Schleifeninvariante P */
while (z <= n) /* Q */ {
    /* z = (x+1)^2 ∧ y = 2x+1 ∧ x^2 ≤ n ∧ z ≤ n ⇒ (x+1)^2 ≤ n */
    x = x + 1;
    /* z = x^2 ∧ y = 2x−1 ∧ x^2 ≤ n */
    y = y + 2;
    /* z = x^2 ∧ y = 2x+1 ∧ x^2 ≤ n */
    z = z + y;
    /* z = x^2 + 2x + 1 ∧ y = 2x+1 ∧ x^2 ≤ n */
    /* (z = (x+1)^2 ∧ y = 2x+1 ∧ x^2 ≤ n) = P */
}
/* (z = (x+1)^2 ∧ y = 2x+1 ∧ x^2 ≤ n ∧ z > n) = P ∧ ¬Q */
/* x^2 ≤ n < (x+1)^2 */
/* x = ⌊√n⌋ */
IO.println (x);
/* Ausgabe: ⌊√n⌋ */
```

Terminierung

Da y immer positiv ist und z immer um y erhöht wird und n fest bleibt, muß irgendwann gelten $z > n$

$\Rightarrow$ Abbruch gesichert

$\Rightarrow$ totale Korrektheit.

Laufzeit

In jedem Schleifendurchlauf wird x um eins erhöht.

Da x bei 0 beginnt und bei $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ endet, wird der Schleifenrumpf $\sqrt{n}$ mal durchlaufen. Der Schleifenrumpf selbst hat eine konstante Anzahl von Schritten.

$\Rightarrow$ Laufzeit $O(n^{\frac{1}{2}})$, wobei n der Wert der Eingabezahl ist!

Weiteres Beispiel für die Zusicherungsmethode:

```
int n, x, y, z;
do { n = IO.readInt(); } while (n < 0);
/* n ≥ 0 */
x = 2; y = n; z = 1;
/* z · x^y = 2^n ∧ y ≥ 0 */
while (y > 0) {
   /* z · x^y = 2^n ∧ y > 0 */
   if (y % 2 == 1) {
      /* z · x^y = 2^n ∧ y > 0 ∧ y ungerade */
      z = z * x;
      /* (z/x) · x^y = 2^n ∧ y > 0 ∧ y ungerade */
      y = y - 1;
      /* (z/x) · x^(y+1) = 2^n ∧ y ≥ 0 */
   /* z · x^y = 2^n ∧ y ≥ 0 */
   } else {
      /* z · x^y = 2^n ∧ y > 0 ∧ y gerade */
      x = x * x;
      /* z · (x^(1/2))^y = 2^n ∧ y > 0 ∧ y gerade */
      y = y/2;
      /* z · (x^(1/2))^(2y) = 2^n ∧ y ≥ 0 */
      /* z · x^y = 2^n ∧ y ≥ 0 */
   }
   /* z · x^y = 2^n ∧ y ≥ 0 */
}
/* z · x^y = 2^n ∧ y ≥ 0 ∧ y ≤ 0 */
/* z · x^y = 2^n ∧ y = 0 ⇒ z = 2^n */
IO.println (z);
/* Ausgabe: 2^n */
```

Terminierung

In jedem Schleifendurchlauf wird y kleiner $\Rightarrow$ irgendwann einmal Null $\Rightarrow$ Abbruch.

Laufzeit

Die Dualzahldarstellung von y schrumpft spätestens nach 2 Schleifendurchläufen um eine Stelle

$\Rightarrow$ $O(\log n)$ Durchläufe, wobei n der Wert der Eingabezahl ist, d.h. $O(n)$, wenn n die Länge der Dualdarstellung der Eingabe ist.

Hinweis: Der naive Ansatz

```
n = IO.readInt("n = "); x = 1;
for (i = 0; i < n; i++) x = 2*x;
```

hat Laufzeit $O(n)$, wenn n der Wert der Eingabezahl ist, d.h. $O(2^k)$, wenn k die Länge der Dualdarstellung von n ist.

6.3 Halteproblem

Beh.: Es gibt kein Programm, welches entscheidet, ob ein gegebenes Programm, angesetzt auf einen gegebenen Input, anhält.

Beweis durch Widerspruch

Annahme: Es gibt eine Methode

```
public static boolean haltetest (char[]s, char[]t)
/* liefert true, falls das durch die Zeichenkette s dargestellte
 * Java-Programm bei den durch die Zeichenkette t dargestellten Eingabedaten
 * anhaelt; liefert false, sonst */
```

Dann lässt sich folgendes Java-Programm in der Datei `Quer.java` konstruieren:

```
public class Quer {

import AlgoTools.IO;

    public static void main(String[] argv) {

        char[] s = IO.readChars();
        if (haltetest(s,s)) while (true);
    }
}
```

Sei q der String, der in der Datei `Quer.java` steht.

Was passiert bei Aufruf von

```
java Quer
```

und Eintippen von q ?

1. Fall:	Hält an	$\Rightarrow$	`haltetest(`q`,`q`) == false`
		$\Rightarrow$	`Quer` angesetzt auf q hält nicht!
2. Fall:	Hält nicht	$\Rightarrow$	`haltetest(`q`,`q`) == true`
		$\Rightarrow$	`Quer` angesetzt auf q hält an!

$\Rightarrow$ Also kann es die Methode `haltetest` nicht geben!

Kapitel 7

Sortieren

Motivation für Sortieren:

1. Häufiges Suchen
   Einmal sortieren, dann jeweils $\log n$ Aufwand.

2. Tritt ein Element in zwei Listen L_1, L_2 auf?
   Sortiere $L_1 \cdot L_2$, dann nach Doppelten suchen!

7.1 Selection Sort

"Hole jeweils das kleinste Element nach vorne"

```
public class SelectionSort {                    // Klasse SelectionSort

  public static void sort(int[] a) {            // statische Methode sort

    int i, j, pos, min;                         // 2 Indizes, Position, Minimum

    for (i=0; i<a.length-1; i++) {              // durchlaufe Array
        pos = i;                                // Index des bisher kleinsten
        min = a[i];                             // Wert des bisher kleinsten
        for (j=i+1; j<a.length; j++)            // durchlaufe Rest des Array
            if (a[j] < min) {                   // falls kleineres gefunden,
                pos = j;                        // merke Position des kleinsten
                min = a[j];                     // merke Wert des kleinsten
            }
        a[pos] = a[i];                          // speichere bisher kleinstes um
        a[i]   = min;                           // neues kleinstes nach vorne
    }
  }
}
```

Beispiel:

```
4 9 3 2 5
2 9 3 4 5
2 3 9 4 5
2 3 4 9 5
2 3 4 5 9
```

Analyse für *Selection Sort*

Worst case und *best case*:
Zwei ineinander geschachtelte `for`-Schleifen

$$n-1+n-2+n-3+\ldots+1$$

$$=\sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} = O(n^2)$$

Platzbedarf: $O(n)$
zusätzlich zu den Daten: $O(1)$

Der Algorithmus wird nicht schneller, wenn die Zahlen bereits sortiert sind!

7.2 Bubblesort

Sortieren mit *Bubblesort* = Blasen steigen auf

"Vertausche jeweils unsortierte Nachbarn"

```
4 9 3 2 5
  3 9
    2 9
4 3 2 5 9
3 4
  2 4
3 2 4 5 9
```

⋮

```
public class BubbleSort {                       // Klasse BubbleSort

  public static void sort(int[] a) {            // statische Methode sort
    int tmp;                                    // Hilfsvariable zum Tauschen
    boolean getauscht;                          // merkt sich, ob getauscht
    do {
        getauscht = false;                      // nimm an, dass nicht getauscht
        for (int i=0; i<a.length-1; i++){       // durchlaufe Array
            if (a[i] > a[i+1]) {                // falls Nachbarn falsch herum
                tmp = a[i];                     // bringe
                a[i] = a[i+1];                  // beide Elemente
                a[i+1] = tmp;                   // in die richtige Ordnung
                getauscht = true;               // vermerke, dass getauscht
            }
        }
    } while (getauscht);                        // solange getauscht wurde
  }
}
```

Analyse von *Bubblesort*

Best case: $O(n)$
Worst case: $O(n^2)$

Die kleinste Zahl wandert in der `for`-Schleife jeweils um eine Position nach links.
Wenn sie zu Beginn ganz rechts steht, so sind $n-1$ Phasen nötig.

Average case: $O(n^2)$

Weitere Verbesserungen möglich (*Shaker Sort*), aber es bleibt bei $O(n^2)$
Grund: Austauschpositionen liegen zu nahe beieinander.

7.3 Mergesort

Idee (rekursiv formuliert):

- Sortiere die vordere Hälfte der Folge
- Sortiere die hintere Hälfte der Folge
- Mische die beiden sortierten Folgen zu einer sortierten Folge

Bemerkung: Diese Vorgehensweise wird *Divide & Conquer* (Teile und Beherrsche) genannt, da das usprüngliche Problem zunächst in unabhängige Teilprobleme zerlegt wird und danach die Teillösungen wieder zusammengeführt werden.

Die Hilfsroutine zum Mischen lautet:

```
public class Merge {                                // Klasse Merge

  public static int[] merge (int[]a, int[]b) {      // mischt a und b
                                                    // liefert Ergebnis zurueck

    int i=0, j=0, k=0;                              // Laufindizes
    int[] c = new int[a.length + b.length];         // Platz fuer Folge c besorgen

    while ((i<a.length) && (j<b.length)) {          // mischen, bis ein Array leer
      if (a[i] < b[j])                              // jeweils das kleinere Element
          c[k++] = a[i++];                          // wird nach c uebernommen
      else
          c[k++] = b[j++];
    }

    while (i<a.length) c[k++] = a[i++];             // ggf.: Rest von Folge a
    while (j<b.length) c[k++] = b[j++];             // ggf.: Rest von Folge b

    return c;                                       // Ergebnis abliefern
  }
}
```

Analyse von *Mergesort* (und ähnlich gelagerten Rekursionen)

$$f(n) \leq \begin{cases} c_1 & \text{für } n = 1 \\ 2 \cdot f(\frac{n}{2}) + c_2 \cdot n & \text{sonst} \end{cases}$$

Beh.: $f \in O(n \cdot \log n)$
Zeige: $f(n) \leq (c_1 + c_2) \cdot n \cdot \log n + c_1$

Verankerung:

$n = 1 \Rightarrow \quad f(1) \leq c_1$ nach Rekursion
$\qquad\qquad\quad f(1) \leq (c_1 + c_2) \cdot 1 \cdot \log 1 + c_1$

Induktionsschluss

Sei bis $n - 1$ bewiesen

$$\begin{aligned} f(n) &\leq 2 \cdot f(\tfrac{n}{2}) + c_2 \cdot n \\ &\uparrow \\ &\text{Rek.} \\ &\leq 2 \cdot [(c_1 + c_2) \cdot \tfrac{n}{2} \cdot \log \tfrac{n}{2} + c_1] + c_2 \cdot n \\ &\uparrow \\ &\text{Induktionsannahme} \\ &= 2 \cdot [(c_1 + c_2) \cdot \tfrac{n}{2} \cdot (\log n - 1) + c_1] + c_2 \cdot n \\ &= (c_1 + c_2)n \cdot \log n - (c_1 + c_2) \cdot n + 2c_1 + c_2 \cdot n \\ &= [(c_1 + c_2)n \cdot \log n + c_1] + [c_1 - c_1 \cdot n] \\ &\leq (c_1 + c_2)n \cdot \log n + c_1 \end{aligned}$$

Aber: *Mergesort* benötigt $O(n)$ zusätzlichen Platz!

Iterative Version von *Mergesort* (für $n = 2^k$)

```
l = 1; /* Länge der sortierten Teilfolgen */
k = n; /* Anzahl der sortierten Teilfolgen */
while (k > 1) {
    /* alle Teilfolgen der Länge l sind sortiert */
    /* Sie beginnen bei l · i für i = 0, 1, ..., k − 1 */
    Mische je zwei benachbarte Teilfolgen der Länge l
    zu einer Teilfolge der Länge 2 * l;
    l *= 2; k /= 2;
    /* Alle Teilfolgen der Länge l sind sortiert */
    /* Sie beginnen bei l · i für i = 0, 1, ..., k − 1 */
}
```

Es ergeben sich $\log n$ Phasen mit jeweils linearem Aufwand.

$\Rightarrow O(n \cdot \log n)$

```
/***************************  SortTest.java  **********************************/

import AlgoTools.IO;

/** testet Sortierverfahren
 */

public class SortTest {

  public static void main (String [] argv) {

    int[] a, b, c;                                        // Folgen a, b und c

    a = IO.readInts("Bitte eine Zahlenfolge:      ");    // Folge einlesen
    SelectionSort.sort(a);                                // SelectionSort aufr.
    IO.print("sortiert mit SelectionSort: ");
    for (int i=0; i<a.length; i++) IO.print(" "+a[i]);  // Ergebnis ausgeben
    IO.println();
    IO.println();

    b = IO.readInts("Bitte eine Zahlenfolge:      ");    // Folge einlesen
    BubbleSort.sort(b);                                   // BubbleSort aufrufen
    IO.print("sortiert mit BubbleSort:    ");
    for (int i=0; i<b.length; i++) IO.print(" "+b[i]);  // Ergebnis ausgeben
    IO.println();
    IO.println();

    c = Merge.merge(a,b);                                 // mische beide Folgen
    IO.print("sortierte Folgen gemischt:  ");
    for (int i=0; i<c.length; i++) IO.print(" "+c[i]);  // Ergebnis ausgeben
    IO.println();
  }
}
```

7.4 Quicksort

```
/***************************  QuickSort.java  *********************************/

/** rekursives Sortieren mit Quicksort
 *  Idee: partitioniere die Folge
 *  in eine elementweise kleinere und eine elementweise groessere Haelfte
 *  und sortiere diese nach demselben Verfahren
 */

public class QuickSort {

  public static void sort (int[] a, int unten, int oben) {
    int tmp ;
    int i = unten;
    int j = oben;
    int x = a[(unten+oben) / 2];                  // Pivotelement, willkuerlich

    do {
        while (a[i] < x) i++;                     // x fungiert als Bremse
        while (a[j] > x) j--;                     // x fungiert als Bremse
        if ( i<=j )  {
            tmp  = a[i];                          // Hilfsspeicher
            a[i] = a[j];                          // a[i] und
            a[j] = tmp;                           // a[j] werden getauscht
            i++;
            j--;
        }
    } while (i <= j);
                              // alle Elemente der linken Haelfte sind kleiner
                              // als alle Elemente der rechten Haelfte

    if (unten < j)  sort(a, unten, j);            // sortiere linke Haelfte
    if (i < oben )  sort(a, i, oben );            // sortiere rechte Haelfte
  }

}
```

Die Analyse der Laufzeit von Quicksort stützt sich auf folgende Rekursionsungleichung für die Anzahl der Schritte $f(n)$ bei n zu sortierenden Daten im günstigsten Fall (Partitionen sind immer gleich groß):

$$f(n) \leq \begin{cases} c_1 & \text{für } n = 1 \\ c_2 \cdot n + 2 \cdot f(\frac{n}{2}) & \text{sonst} \end{cases}$$

Daraus ergibt sich $f \in O(n \cdot \log n)$. Diese Komplexität gilt auch für den durchschnittlichen Fall; es lässt sich zeigen, dass die Zahl der Schritte nur um den konstanten Faktor 1.4 wächst.

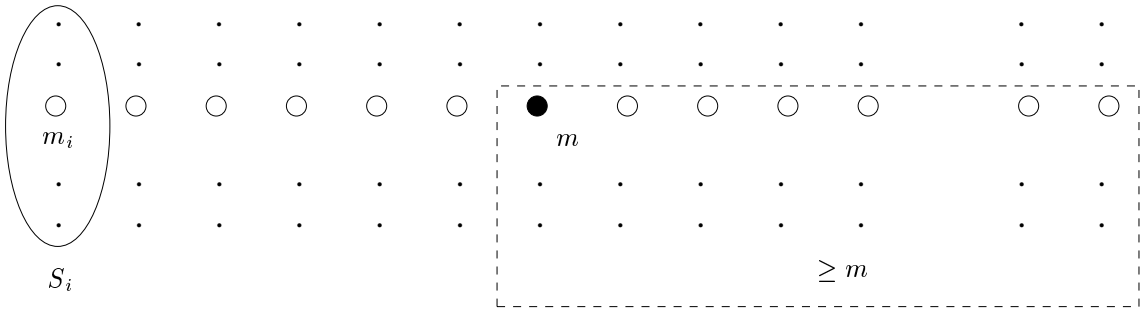
Im ungünstigsten Fall (bei entarteten Partitionen) gilt $f \in O(n^2)$.

```
/*************************  QuickSortTest.java  ****************************/

import AlgoTools.IO;

/** testet Quicksort
 */

public class QuickSortTest {

  public static void main (String [] argv) {

    int[] a;                                              // Folge a

    a = IO.readInts("Bitte eine Zahlenfolge: ");          // Folge einlesen
    QuickSort.sort(a, 0, a.length-1);                     // QuickSort aufrufen
    IO.print("sortiert mit QuickSort: ");
    for (int i=0; i<a.length; i++) IO.print(" "+a[i]);    // Ergebnis ausgeben
    IO.println();
  }
}
```

7.5 Bestimmung des Medians

```
public static double select (double[] S, int k) {
/* Liefert aus dem Feld S das k-t kleinste Element. */
/* Das Feld S habe n Elemente. k ≤ n. */
   double[] A, B, C;


   if (|S| < 50) return k-t kleinstes Element per Hand;
   else {
      n = |S|;
      zerlege S in Gruppen zu je 5 Elementen S_1, S_2, ..., S_{n/5};
      Bestimme in jeder Gruppe S_i den Median m_i;
      Bestimme den Median der Mediane:
         m = select (⋃_i m_i, n/10);
      A = {x ∈ S | x < m};
      B = {x ∈ S | x == m};
      C = {x ∈ S | x > m};
      if (|A| >= k) return select (A, k);
      else if (|A|+|B| >= k) return m;
      else /* if (|A|+|B|+|C| >= k) */ return select(C, k-|A|-|B|);
   }
}
```

Beh.: $|A| \leq \frac{3}{4}n$



d.h. mind. $\frac{1}{4}$ der Elemente von S ist $\geq m$

$\Rightarrow$ höchstens $\frac{3}{4}$ der Elemente von S ist $< m$

$\Rightarrow |A| \leq \frac{3}{4}n$, analog $|C| \leq \frac{3}{4}n$.

Sei $f(n)$ die Anzahl der Schritte, die die Methode `select` benötigt für eine Menge S der Kardinalität n.

Also:

$$f(n) \leq \begin{cases} c & & & & & \text{, für } n < 50 \\ c \cdot n & + & f(\frac{n}{5}) & + & f(\frac{3}{4}n) & \text{, sonst} \\ \text{Mediane} & & \text{Median} & & \text{Aufruf mit} & \\ \text{der 5er Gruppen} & & \text{der Mediane} & & \text{A oder C} & \end{cases}$$

Beh.: $f \in O(n)$

Zeige: $f(n) \leq 20 \cdot c \cdot n$

Beweis durch Induktion:

$f(n) \leq c \leq 20 \cdot c \cdot n$ für $n < 50$

Sei bis $n-1$ bewiesen

$$\begin{array}{lcccccc} f(n) & \leq & c \cdot n & + & f(\frac{n}{5}) & + & f(\frac{3}{4}n) \\ & \uparrow & & & & & \\ & \text{Rekursionsgl.} & & & & & \\ & \leq & c \cdot n & + & 20 \cdot c \cdot \frac{n}{5} & + & 20 \cdot c \cdot \frac{3}{4} \cdot n \\ & \uparrow & & & & & \\ & \text{Ind.-Annahme} & & & & & \\ & = & 1 \cdot c \cdot n & + & 4 \cdot c \cdot n & + & 15 \cdot c \cdot n \\ & = & 20 \cdot c \cdot n & & & & \end{array}$$

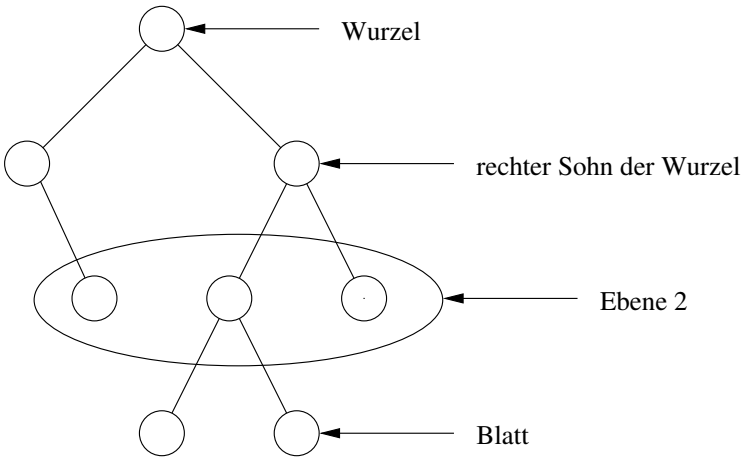
q.e.d.

7.6 Heapsort

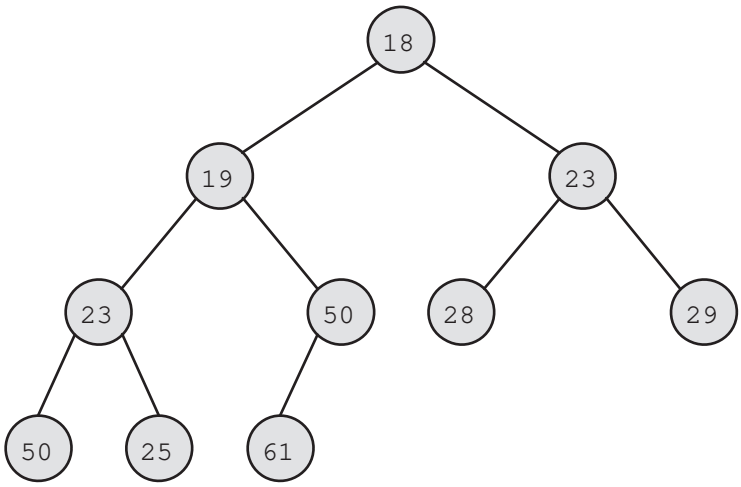
Baum und Heap

Def.: Ein *binärer Baum* ist entweder leer oder besteht aus einem Knoten, dem zwei binäre Bäume zugeordnet sind. Dieser heißt dann *Vater* des linken bzw. rechten Teilbaums. Ein Knoten ohne Vater heißt *Wurzel*. Die Knoten, die x zum Vater haben, sind seine *Söhne*. Knoten ohne Söhne heißen *Blätter*.

Ebene $0 =$ Wurzel. Ebene $i + 1 =$ Söhne von Ebene i.



Def.: Ein *Heap* ist ein binärer Baum mit $n + 1$ Ebenen, in dem die Ebenen $0, 1, \ldots, n - 1$ vollständig besetzt sind; Ebene n ist von links beginnend bis zum so genannten letzten Knoten vollständig besetzt. Die Knoten enthalten Schlüssel. Der Schlüssel eines Knotens ist kleiner oder gleich den Schlüsseln seiner Söhne.



Offenbar steht der kleinste Schlüssel eines Heaps in der Wurzel.

Idee für *Heapsort*:

Verwendet wird ein Heap als Datenstruktur, die das Entfernen des Minimums unterstützt.

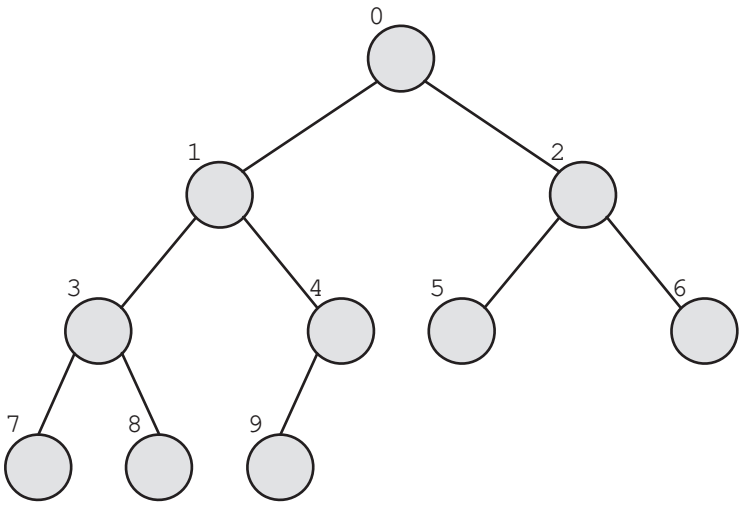
Gegeben seien die Schlüssel $a_1, \ldots, a_n$.

```
Baue einen Heap auf mit den Schlüsseln a1,...,an.
do {
   entferne Wurzel; // = Minimum
   reorganisiere Heap;
} while (Heap ist nicht leer);
```

Idee für Wurzelentfernen:

Entferne "letzten" Knoten im Heap und schreibe seinen Schlüssel in die Wurzel.
Vertausche so lange Knoten mit "kleinerem" Sohn, bis Heapbeziehung eintritt.

Idee für Implementation: Die Knoten werden wie folgt nummeriert:
Wurzel erhält Nr. 0,
linker Sohn von Knoten i erhält die Nr. $(2 \cdot i + 1)$
rechter Sohn von Knoten i erhält die Nr. $(2 \cdot i + 2)$



Im Array

```
double[] a = new double [n];
```

steht in `a[i]` der Schlüssel von Knoten i.

Vorteil: Die Vater/Sohn-Beziehung ist allein aus dem Knotenindex zu berechnen.
$2i + 1$ bzw. $2i + 2$ heißen die Söhne von i
$(i - 1)/2$ heißt der Vater von i.

```
/***************************  HeapSort.java  **********************************/

import AlgoTools.IO;

/** Iteratives Sortieren mit Heapsort
 *  Entnimm einem Heap so lange das kleinste Element, bis er leer ist.
 *  Die entnommenen Elemente werden im selben Array gespeichert.
 */

public class HeapSort {

  private static void sift (int[] a, int l, int r) {
                                                // repariere das Array a
                                                // in den Grenzen von l bis r
    int i, j;                                   // Indizes
    int x;                                      // Array-Element

    i = l; x = a[l];                            // i und x initialisieren
    j = 2*i+1;                                  // linker Sohn
    if ((j<r) && (a[j+1]<a[j])) j++;            // jetzt ist j der kleinere Sohn

    while ((j<=r) && (a[j] < x)) {              // falls kleinerer Sohn existiert
        a[i] = a[j];
        i    = j;
        j    = j*2+1;
        if ((j<r) && (a[j+1]<a[j])) j++;        // jetzt ist j der kleinere Sohn
    }
    a[i] = x;
  }

  public static void sort (int[] a) {           // statische Methode sort
    int l,r,n,tmp;                              // links, rechts, Anzahl, tmp
    n = a.length;                               // Zahl der Heap-Eintraege

    for (l=(n-2)/2; l>=0; l--)                  // beginnend beim letzten Vater
        sift(a,l,n-1);                          // jeweils Heap reparieren

    for (r=n-1; r>0; r--) {                     // rechte Grenze fallen lassen
        tmp  = a[0];                            // kleinstes Element holen
        a[0] = a[r];                            // letztes nach vorne
        a[r] = tmp;                             // kleinstes nach hinten
        sift(a, 0, r-1);                        // Heap korrigieren
    }
  }
}
```

Aufwand für die Konstruktion eines Heaps

Sei h die Höhe eines Heaps. Sei $n - 1 = 2^h - 1$ die Anzahl der Elemente, z.B. $15 = 2^4 - 1$.

Ebene	Sickertiefe	Anzahl
$h-1$	1	$\frac{n}{2}$
$h-2$	2	$\frac{n}{4}$
$h-3$	3	$\frac{n}{8}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0	h	$\frac{n}{2^h} = 1$

Anzahl der Schritte:

$$\sum_{i=1}^{h} c \cdot i \cdot \frac{n}{2^i} = c \cdot n \cdot \sum_{i=1}^{h} \frac{i}{2^i}$$

$\Rightarrow$ Aufwand $O(n)$, denn: $\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \ldots < 2$

Aufwand für einmaliges Minimumentfernen: $O(\log n)$

$\Rightarrow$ **Gesamtaufwand:** $O(n) + O(n \cdot \log n) = O(n \cdot \log n)$

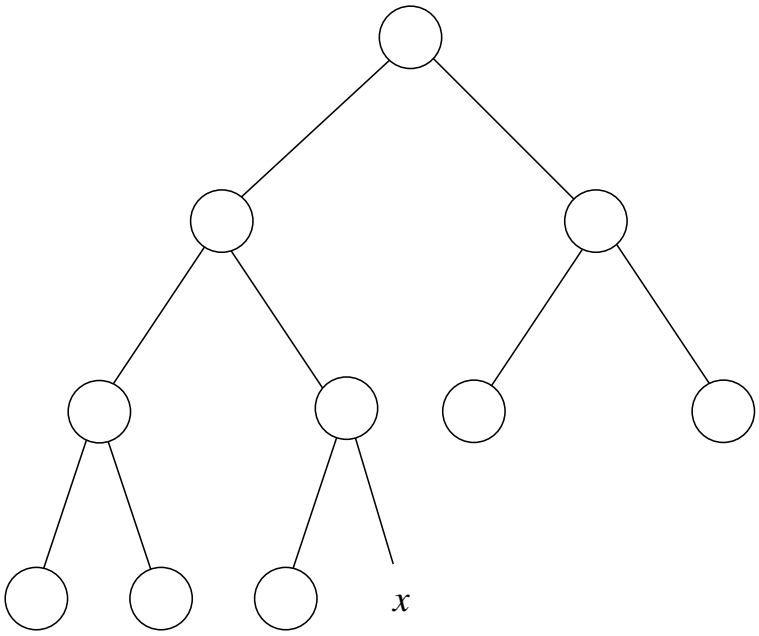
für best, average und worst case.

Weitere Einsatzmöglichkeit des Heaps

Verwende eine dynamisch sich ändernde Menge von Schlüsseln mit den Operationen

- `initheap` legt leeren Heap an
- `get_min` liefert das momentan Kleinste
- `del_min` entfernt das momentan Kleinste
- `insert(x)` fügt x hinzu
- `heapempty` testet, ob Heap leer ist

Idee für Einfügen: (schlecht: von oben nach unten)
besser: Füge neues Blatt mit Schlüssel x an, und lasse x hochsickern.

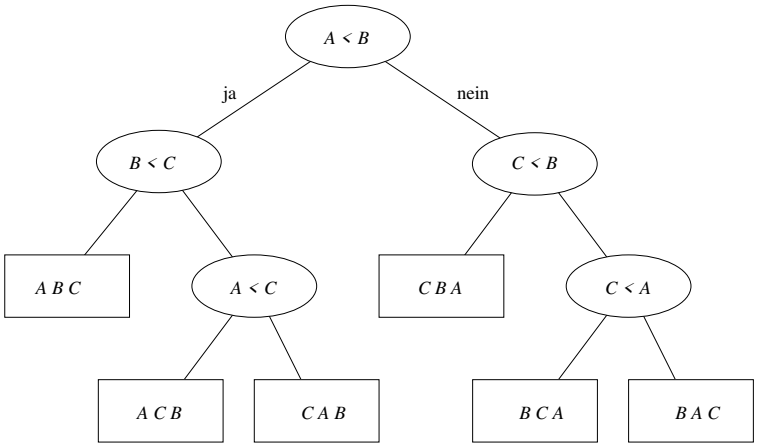



```
i = neuer Index;
while (a[i] < a[vater(i)]){
   tausche a[i] mit a[vater(i)];
   i = vater(i);
}
```

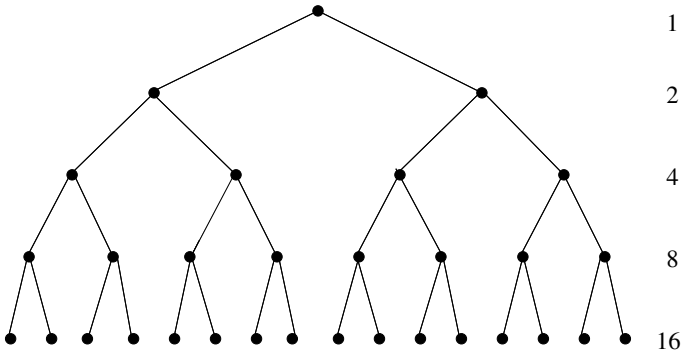
Aufwand $O(\log n)$

7.7 Untere Schranke für Sortieren durch Vergleichen

Entscheidungsbaum zur Sortierung von 3 Elementen:
gegeben A, B, C



Der Entscheidungsbaum zur Sortierung von n Elementen hat $n!$ Blätter.



Höhe = log k bei k Blättern

$$n! \geq n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot \frac{n}{2} \geq \left(\left(\frac{n}{2} \right)^{\frac{n}{2}} \right)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \log n! &\geq \log \left(\left(\frac{n}{2} \right)^{\frac{n}{2}} \right) = \frac{n}{2} \cdot \log \left(\frac{n}{2} \right) = \frac{n}{2} (\log n - 1) \\ &= \frac{n}{2} \cdot \log n - \frac{n}{2} = \frac{n}{4} \cdot \log n + \frac{n}{4} \cdot \log n - \frac{n}{2} \\ &\geq \frac{n}{4} \cdot \log n \text{ für } n \geq 4 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Ein binärer Baum mit $n!$ Blättern hat mindestens die Höhe $\frac{n}{4} \cdot \log n$.

$\Rightarrow$ Jeder Sortieralgorithmus, der auf Vergleichen beruht, hat als Laufzeit mindestens $O(n \cdot \log n)$. Dies ist eine untere Schranke.

7.8 Bucket Sort

```
/***************************  BucketSort.java  *******************************/

import AlgoTools.IO;

/** Sortieren durch Verteilen auf Buckets (Faecher).
 *  Idee: 1.) Zaehlen der Haeufigkeiten b[i] einzelner Schluessel i;
 *        2.) Buckets durchlaufen und i-ten Schluessel b[i]-mal ausgeben.
 */

public class BucketSort {

  static final int N = 256;                       // Alphabetgroesse N

  public static char[] sort (char[] a) {          // sortiere Character-Array a
                                                  // und liefere Ergebnis zurueck

    char[] fertig = new char[a.length];           // Ergebniszeichenkette
    int[] b = new int[N];                         // N Buckets
    int i, j, k=0;                                // Laufvariablen

    for (i=0; i < N; i++) b[i] = 0;               // setze alle Buckets auf 0

    for (i=0; i < a.length; i++)                  // fuer jedes Eingabezeichen
        b[a[i]]++;                                // zustaendiges Bucket erhoehen

    for (i=0; i < N; i++)                         // fuer jedes Bucket
        for (j=0; j < b[i]; j++)                  // gemaess Zaehlerstand
            fertig[k++] = (char) i;               // sein Zeichen uebernehmen

    return fertig;                                // Zeichenkette zurueckgeben
  }

  public static void main (String [] argv) {

    char[] zeile, ergebnis;                               // 2 Zeichenfolgen

    zeile = IO.readChars("Bitte Zeichenkette:       "); // Zeichenkette einlesen
    ergebnis = sort(zeile);                               // Bucket-Sort aufrufen
    IO.print("sortiert mit Bucket-Sort: ");               // Ergebnis ausgeben
    IO.println(ergebnis);
  }
}
// Aufwand: O(n) + O(N)   bei n(=a.length) zu sortierenden Zeichen
//                        aus einem N-elementigen Alphabet
```

7.9 Radix Sort

Idee: Sortieren von Strings über einem endlichen Alphabet durch mehrmaliges Anwenden von Bucket Sort.

Es soll eine Liste von Wörtern mit insgesamt n Buchstaben in $O(n)$ sortiert werden. Pro Buchstabe des Alphabets existiert ein Bucket.

Zunächst wird angenommen, dass alle Wörter die Länge N haben.

Es werden sukzessive Listen $W_N, W_{N-1}, \ldots, W_0$ gebildet.
W_N enthält die unsortierten Wörter in der gegebenen initialen Reihenfolge.
W_j mit $j \in [0, \ldots, N-1]$ enthält alle Wörter, aufsteigend sortiert bezüglich der Positionen $j+1, \ldots, N$.
Das Ergebnis der Sortiervorgänge ist W_0.

```
for (j = N; j > 0; j--) {
   verteile die Wörter aus W_j
   gemäß j-tem Buchstaben
   auf die Buckets;
   sammele Buckets auf nach W_{j-1}
}
```

Beispiel:

Zu sortieren seien die Strings

`hefe bach gaga cafe geha`

Es entstehen nacheinander folgende Listen (unterstrichen ist jeweils der Buchstabe, der im nächsten Schritt zum Verteilen benutzt wird):

W_4: hef<u>e</u> bac<u>h</u> gag<u>a</u> caf<u>e</u> geh<u>a</u>
W_3: ga<u>g</u>a ge<u>h</u>a he<u>f</u>e ca<u>f</u>e ba<u>c</u>h
W_2: b<u>a</u>ch h<u>e</u>fe c<u>a</u>fe g<u>a</u>ga g<u>e</u>ha
W_1: <u>b</u>ach <u>c</u>afe <u>g</u>aga <u>h</u>efe <u>g</u>eha
W_0: bach cafe gaga geha hefe

Die zugehörigen Buckets lauten:

	$W_4 \to W_3$	$W_3 \to W_2$	$W_2 \to W_1$	$W_1 \to W_0$
a	gaga geha		bach cafe gaga	
b				bach
c		bach		cafe
d				
e	hefe cafe		hefe geha	
f		hefe cafe		
g		gaga		gaga geha
h	bach	geha		hefe

Beim Aufsammeln werden die Buckets in alphabetischer Reihenfolge durchlaufen und ihre Inhalte konkateniert.

Um beim Einsammeln der Buckets nur die gefüllten anzufassen, ist es hilfreich, zu Beginn

```
char[][] nichtleer;
```

anzulegen. `nichtleer[j]` enthält die Buchstaben, welche in den zu sortierenden Wörtern an j-ter Position vorkommen. Verteile hierzu zunächst Positionen auf Buchstaben:

`pos[x]`$=\{j|$ Buchstabe x kommt an j-ter Position vor $\}$

x	pos[x]				
a	2	2	4	2	4
b	1				
c	3	1			
d					
e	2	4	4	2	
f	3	3			
g	1	3	1		
h	1	4	3		

Nach dem Einsammeln der Buckets werden die Buchstaben auf Positionen verteilt:

j	nichtleer[j]				
1	b	c	g	g	h
2	a	a	a	e	e
3	c	f	f	g	h
4	a	a	e	e	h

Obacht: Bei der Konstruktion von `nichtleer` müssen doppelte Einträge vermieden werden (möglich, da sie hintereinander stehen würden).

Bei Vermeidung der Doppelten hat `nichtleer[j]` folgende Gestalt:

j	nichtleer[j]			
1	b	c	g	h
2	a	e		
3	c	f	g	h
4	a	e	h	

Der Aufwand zur Konstruktion von `nichtleer` beträgt $O(n)$. Jedes Wort wird bzgl. jedes Buchstabens einmal verteilt und einmal aufgesammelt, jeweils in konstanter Zeit.

Bei Wörtern **unterschiedlicher** Länge bilde zunächst

`laenge[j]` = $\{w|$ Länge von Wort $w = j\}$

Der Aufwand hierfür beträgt $O(n)$.

Verteile im j-ten Durchlauf zunächst alle Wörter aus `laenge[j]`;
z.B. `fad` wird bzgl. des 3. Buchstabens verteilt, bevor W_3 verteilt wird.

Der Aufwand zum Verteilen und Aufsammeln der Listen $W_N, \ldots, W_0$ beträgt $O(n)$, da jedes Zeichen einmal zum Verteilen benutzt wird und einmal beim Aufsammeln unter Vermeidung der nichtleeren Buckets zu einem Schritt beiträgt.

7.10 Externes Sortieren

Problem: Sortieren auf Medien mit sequentiellem Lese- und Schreibzugriff.
Lösung: Wiederholtes Mischen von bereits sortierten Teilfolgen.

Ein *Lauf* ist eine monoton nicht fallende Teilfolge.

$$\underbrace{3 \quad 7 \quad 8}_{\text{Lauf}} \quad \underbrace{2 \quad 9}_{\text{Lauf}} \quad \underbrace{4}_{\text{Lauf}} \quad \underbrace{1 \quad 5 \quad 6}_{\text{Lauf}}$$

Gegeben 3 Magnetbänder, mit initial 0, n, 0 Läufen. Je 2 Bänder mischen ihre Läufe zusammen auf das dritte:

Band A:	0	0	8	3	0	2	1	0
Band B:	21	13	5	0	3	1	0	1
Band C:	0	8	0	5	2	0	1	0
								sortiert

(In jeder Spalte ist die momentane Anzahl der Läufe vermerkt.)

Allgemeine Regel:

Sei $fib(i)$ die i-te Fibonacci-Zahl.

Es habe Band	A	$fib(i)$	Läufe
	B	$fib(i-1)$	Läufe
	C	0	Läufe

dann mische $fib(i-1)$ Läufe von A und B zusammen auf Band C.

Kapitel 8

Objektorientierte Programmierung

Die Modellierung eines Ausschnittes der realen Welt geschieht durch eine Klassenhierarchie, d.h., gleichartige Objekte werden zu Klassen zusammengefasst, von denen durch Vererbung Spezialisierungen abgeleitet werden. Gleichartigkeit bedeutet die Übereinstimmung von objektbezogenen Datenfeldern und objektbezogenen Methoden. Die abgeleitete Klasse erbt von der Superklasse die dort definierten Datenfelder und Methoden, fügt ggf. eigene hinzu und kann ihnen ggf. durch Überschreiben eine neue Bedeutung geben. Jede Klasse besitzt einen oder mehrere Konstruktoren, die für das Instanziieren ihrer Objekte zuständig sind.

Datenfelder, die mit dem Schlüsselwort `static` deklariert werden, heißen *Klassenvariable*. Sie existieren pro Klasse genau einmal (unabhängig von der Zahl der kreierten Instanzen) und übernehmen die Rolle von globalen Variablen, auf die alle Objekte dieser Klasse zugreifen können.

Die Sichtbarkeit von Variablen und Methoden wird mit Hilfe von Modifiern geregelt. Ist ein Element einer Klasse mit keinem der Schlüsselworte `public`, `private` oder `protected` deklariert, dann ist es nur innerhalb von Klassen desselben Pakets sichtbar. Das Standardpaket besteht aus allen Klassen im aktuellen Arbeitsverzeichnis.

Die folgende Tabelle zeigt die Umstände, unter denen Klassenelemente der vier Sichtbarkeitstypen für verschiedene Klassen erreichbar sind.

Erreichbar für:	`public`	`protected`	paketsichtbar	`private`
Dieselbe Klasse	ja	ja	ja	ja
Subklasse im selben Paket	ja	ja	ja	nein
Subklasse in anderem Paket	ja	ja	nein	nein
Keine Subklasse, selbes Paket	ja	ja	ja	nein
Keine Subklasse, anderes Paket	ja	nein	nein	nein

```
/***************************  Datum.java  ************************************/

import AlgoTools.IO;

/** Klasse Datum
 *  bestehend aus drei Integers (Tag, Monat, Jahr)
 *  und zwei Konstruktoren zum Anlegen eines Datums
 *  und einer Methode zur Umwandlung eines Datums in einen String
 */

public class Datum {

  int tag;                                        // Datenfeld tag
  int monat;                                      // Datenfeld monat
  int jahr;                                       // Datenfeld jahr

  public Datum (int tag, int monat, int jahr){ // Konstruktor mit 3 Parametern
    this.tag   = tag;                             // initialisiere Tag
    this.monat = monat;                           // initialisiere Monat
    this.jahr  = jahr;                            // initialisiere Jahr
  }

  public Datum (int jahr){                        // Konstruktor mit 1 Parameter
    this(1, 1, jahr);                             // initialisiere 1.1. Jahr
  }

  public String toString(){                       // Methode ohne Parameter
    return tag + "." + monat + "." + jahr;        // liefert Datum als String
  }

  public static void main (String [] argv) {

    Datum d;                                      // deklariere ein Datum

    d = new Datum (15,8,1972);                    // kreiere Datum 15.08.1972
    d = new Datum (1972);                         // kreiere Datum 01.01.1972
    d.jahr++;                                     // erhoehe Datum um ein Jahr
    IO.println(d.toString());                     // drucke Datum
    IO.println(d);                                // hier: implizites toString()
  }
}
```

```
/***************************  Person.java  ************************************/

import AlgoTools.IO;

/** Klasse Person
 *  bestehend aus Vorname, Nachname, Geburtsdatum
 *  mit einem Konstruktor zum Anlegen einer Person
 *  und zwei Methoden zum Ermitteln des Jahrgangs und des Alters
 */

public class Person {

  String vorname;                                   // Datenfeld Vorname
  String nachname;                                  // Datenfeld Nachname
  Datum  geb_datum;                                 // Datenfeld Geburtsdatum

  public Person                                     // Konstruktor mit
               (String vn,                          // Vorname
                String nn,                          // Nachname
                int t,                              // Geburtstag
                int m,                              // Geburtsmonat
                int j)                              // Geburtsjahr
  {
    vorname   = vn;                                 // initialisiere Vorname
    nachname  = nn;                                 // initialisiere Nachname
    geb_datum = new Datum(t,m,j);                   // initialisiere Geburtsdatum
  }

  public int jahrgang () {                          // Methode
    return geb_datum.jahr;                          // liefert Geburtsjahrgang
  }

  public int alter(){                               // Methode
    return 2001 - geb_datum.jahr;                   // liefert das Lebensalter
  }

  public static void main (String [] argv) {

    Person p;                                       // deklariere eine Person

    p = new Person("Willi","Wacker",22,8,1972);     // kreiere Person
    p.geb_datum.jahr++;                             // mache sie 1 Jahr juenger
    IO.print(p.vorname + " " + p.nachname);         // gib Name aus
    IO.println(" ist "+p.alter()+" Jahre alt.");    // gib Alter aus
  }
}
```

```
/***************************  Student.java  **********************************/

import AlgoTools.IO;

/** Klasse Student, spezialisiert die Klasse Person
 *  durch Klassenvariable next_mat_nr;
 *  durch weitere Datenfelder mat_nr, fach, jsb
 *  durch eigenen Konstruktor und durch eigene Methode jahrgang
 *  welche die Methode jahrgang der Klasse Person ueberschreibt
 */

public class Student extends Person {            // Student erbt von Person

  static int next_mat_nr = 100000;               // globale Klassenvariable

  int mat_nr;                                    // Matrikel-Nummer
  String fach;                                   // Studienfach
  int jsb;                                       // Jahr des Studienbeginns

  public Student                                 // Konstruktor mit
                 (String vn,                     // Vorname
                  String nn,                     // Nachname
                  int t,                         // Geburtstag
                  int m,                         // Geburtsmonat
                  int j,                         // Geburtsjahr
                  String fach,                   // Studienfach
                  int jsb)                       // Studienbeginn
  {
    super(vn, nn, t, m, j);                      // Konstruktor des Vorfahren
    this.fach   = fach;                          // initialisiere Fach
    this.jsb    = jsb;                           // initialisiere Studienbeginn
    mat_nr      = next_mat_nr++;                 // vergib naechste Mat-Nr.
  }

  public int jahrgang() {                        // Methode liefert als Jahrgang
    return jsb;                                  // das Jahr des Studienbeginns
  }

  public static void main (String [] argv) {
    Student s;                                           // deklariere Student
    s = new Student("Willi","Wacker",22,8,1972,"BWL",1995);// kreiere Student
    IO.print(s.vorname + " " + s.nachname);              // gib Name aus und
    IO.println("'s Matrikelnummer lautet: " + s.mat_nr);   // Matrikelnummer
  }
}
```

```
/***************************  PersonTest.java *********************************/

import AlgoTools.IO;

/** Klasse PersonTest
 *  verwendet Instanzen der Klasse Person und der Klasse Student
 */

public class PersonTest {

  public static void main (String [] argv) {

    Student s;                                          // Student
    Person p;                                           // Person

    p = new Person("Uwe","Meier",24,12,1971);           // kreiere Person
    s = new Student("Eva","Kahn",15,9,1972,"BWL",1998); // kreiere Student

    IO.println(p.nachname+"'s Jahrgang: "+p.jahrgang()); // gib Jahrgang aus
                                                        // da p eine Person ist
                                                        // wird Geburtsjahrgang
                                                        // ausgegeben

    IO.println(s.nachname+"'s Jahrgang: "+s.jahrgang()); // gib Jahrgang aus
                                                        // da s ein Student ist
                                                        // wird
                                                        // Immatrikulationsjahr
                                                        // ausgegebn

    p = s;                                              // p zeigt auf s

    IO.println(p.nachname+"'s Jahrgang: "+p.jahrgang()); // gib Jahrgang aus
                                                        // da p auf Student
                                                        // zeigt, wird
                                                        // Immatrikulationsjahr
                                                        // ausgegeben



    if (p instanceof Student)                           // falls p Student ist
      IO.println(((Student)p).fach);                    // gib p's Fach aus

    s = (Student) p;                                    // s zeigt auf p
    IO.println(s.fach);                                 // gib s's Fach aus
  }
}
```

```
/***************************  Mitarbeiter.java  ******************************/
/** abstrakte Klasse Mitarbeiter mit Name, Vorname und abstrakter Methode     */

public abstract class Mitarbeiter {
  String vorname;                                   // Vorname
  String nachname;                                  // Nachname
  abstract double monatsBrutto();                   // abstrakte Methode
}


/***************************  Arbeiter.java  *********************************/
/** Klasse Arbeiter mit Stundenlohn und Stundenzahl
 *  und der Implementierung der abstrakten Methode der Superklasse           */

public class Arbeiter extends Mitarbeiter {
  double std_lohn;                                  // Stundenlohn
  double std_zahl;                                  // Arbeitsstunden im Monat

  public Arbeiter(String v, String n, double l, double z){ // Konstruktor
    vorname =v; nachname=n;
    std_lohn=l; std_zahl=z;
  }

  public double monatsBrutto() {                    // berechnet Monatsbrutto
    return std_lohn * std_zahl;                     // aus Stundenlohn
  }                                                 // und Stundenzahl
}


/***************************  Angestellter.java  *****************************/
/** Klasse Angestellter mit Grundgehalt und Ortszuschlag
 *  und der Implementierung der abstrakten Methode der Superklasse           */

public class Angestellter extends Mitarbeiter {
  double grundgehalt;                               // Grundgehalt
  double ortszuschlag;                              // Ortszuschlag

  public Angestellter(String v,String n,double g,double o){// Konstruktor
    vorname=v;     nachname=n;
    grundgehalt=g; ortszuschlag=o;
  }

  public double monatsBrutto() {                    // berechnet Monatsbrutto
    return grundgehalt + ortszuschlag;              // aus Grundgehalt
  }                                                 // und Ortszuschlag
}
```

```
/***************************  Firma.java  ************************************/
import AlgoTools.IO;

/** Klasse Firma
 *  verwendet ein Array von Mitarbeitern und summiert die Bruttogehaelter
 */

public class Firma {

  public static void main (String [] argv){

    final int N = 4;                              // Zahl der Mitarbeiter
    Mitarbeiter [] ma   = new Mitarbeiter[N];     // Platz fuer Mitarbeiter-Array

    ma[0]=new Arbeiter("Jim","Knopf",15,170);     // lege 1. Mitarbeiter an
    ma[1]=new Angestellter("Jo","Hip",2000,300); // lege 2. Mitarbeiter an
    ma[2]=new Angestellter("Ute","Fip",900,200); // lege 3. Mitarbeiter an
    ma[3]=new Arbeiter("Uwe","Schulz",17,165);    // lege 4. Mitarbeiter an

    double bruttoSumme = 0.0;                     // initialisiere Bruttosumme

    for (int i=0; i < N; i++)                     // durchlaufe Mitarbeiter-Array
        bruttoSumme += ma[i].monatsBrutto();      // und addiere Monats-Brutto

    IO.print  ("Gesamtes Monatsbrutto in DM:");   // Ausgabe
    IO.println(bruttoSumme,8,2);                  // der errechneten Bruttosumme

  }

}
```

```
/***************************  Kind.java  ************************************/

import AlgoTools.IO;

/** Klasse Kind
 *  bestehend aus Nummer und Verweis auf Nachbarkind
 *  mit Konstruktor zum Anlegen eines Kindes
 *  ermoeglicht Implementierung eines Abzaehlreims mit k Silben fuer n Kinder
 */

public class Kind {

  int  nr;                                      // Nummer
  Kind next;                                    // Verweis auf naechstes Kind

  public Kind (int nr) {                        // Konstruktor fuer Kind
    this.nr   = nr;                             // initialisiere Nummer
  }

  public static void main (String [] argv) {

    int i;                                      // Laufvariable
    int n=IO.readInt("Wie viele Kinder ? ");    // erfrage Kinderzahl
    int k=IO.readInt("Wie viele Silben ? ");    // erfrage Silbenzahl

    Kind erster, letzter, index;                // deklariere drei Kinder

    erster = letzter =  new Kind(0);            // kreiere erstes Kind

    for (i=1; i < n; i++){                      // erzeuge n-1 mal
      index = new Kind(i);                      // ein Kind mit Nummer i
      letzter.next = index;                     // erreichbar vom Vorgaenger
      letzter = index;
    }
    letzter.next = erster;                      // schliesse Kreis

    index = letzter;                            // beginne bei letztem Kind
    while (index.next != index) {               // solange ungleich Nachfolger
      for (i=1; i<k; i++) index=index.next;     // gehe k-1 mal weiter
      IO.print("Ausgeschieden: ");               // Gib die Nummer des Kindes aus,
      IO.println(index.next.nr, 5);             // welches jetzt ausscheidet
      index.next = index.next.next;             // bestimme neuen Nachfolger
    }
    IO.println("Es bleibt uebrig: " + index.nr);
  }
}
```

Kapitel 9

Abstrakte Datentypen

Ein *abstrakter Datentyp* (ADT) ist eine Datenstruktur zusammen mit darauf definierten Operationen.

Java unterstützt den Umgang mit ADTs durch die Bereitstellung von Klassen und Interfaces.

Interfaces enthalten nur Methodenköpfe und Konstanten. Alle in einem Interface definierten Methoden sind implizit `abstract`. Ein Interface stellt eine Schnittstelle dar und legt damit die Funktionalität ihrer Methoden fest, ohne diese zu implementieren. Dies geschieht im Gegensatz zu einer abstrakten Klasse nicht in einer Subklasse, sondern in einer beliebigen Klasse, die dies zuerst in einer `implements`-Klausel deklariert und die dann eine Implementation aller Methoden des Interface bereitstellen muss. Verwendet werden kann ein Interface auch ohne Kenntnis der konkreten Implementation.

9.1 Liste

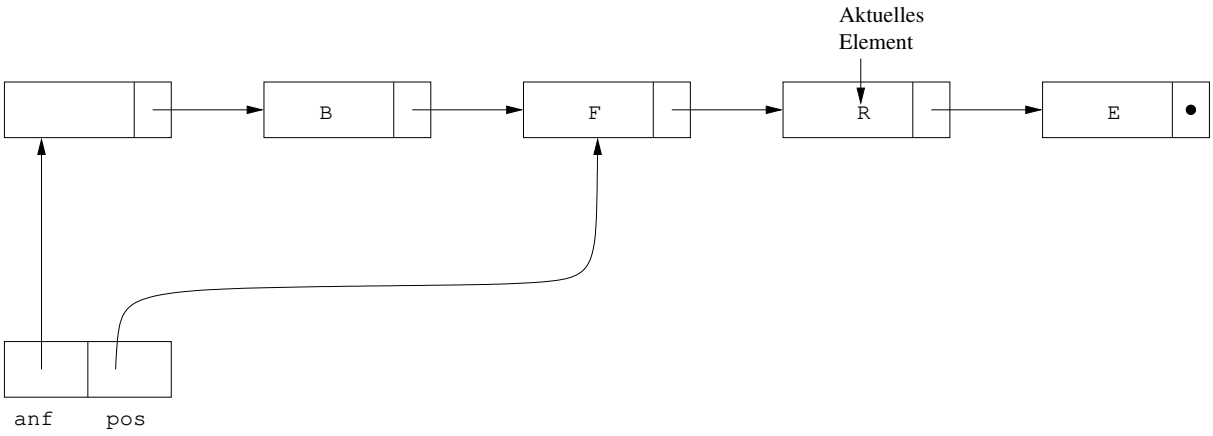
Def.: Eine *Liste* ist eine (ggf. leere) Folge von Elementen zusammen mit einem so genannten (ggf. undefinierten) *aktuellen* Element.

Schnittstelle des ADT `Liste`:

`empty`	:	Liste	$\rightarrow$	boolean	liefert true, falls Liste leer
`endpos`	:	Liste	$\rightarrow$	boolean	liefert true, wenn Liste abgearbeitet
`reset`	:	Liste	$\rightarrow$	Liste	das erste Listenelement wird zum aktuellen
`advance`	:	Liste	$\rightarrow$	Liste	der Nachfolger des akt. wird zum aktuellen
`elem`	:	Liste	$\rightarrow$	Objekt	liefert das aktuelle Element
`insert`	:	Liste $\times$ Objekt	$\rightarrow$	Liste	fügt vor das aktuelle Element ein Element ein; das neu eingefügte wird zum aktuellen
`delete`	:	Liste	$\rightarrow$	Liste	löscht das aktuelle Element; der Nachfolger wird zum aktuellen

```
/****************************  Liste.java  **********************************/
/** Interface fuer den ADT Liste                                             */

public interface Liste {

    public boolean empty();        // true, wenn Liste leer, false sonst

    public boolean endpos();       // true, wenn Liste am Ende, false sonst

    public void reset();           // rueckt an den Anfang der Liste

    public void advance();         // rueckt in Liste eine Position weiter

    public Object elem();          // liefert Inhalt des aktuellen Elements

    public void insert(Object x);  // fuegt x vor das aktuelle Element ein
                                   // und macht x zum aktuellen Element

    public void delete();          // entfernt aktuelles Element und macht
                                   // seinen Nachfolger zum aktuellen Element
}
```

Konzept zur Implementation einer Liste:



`anf` zeigt auf den ersten Listen-Eintrag (leerer Inhalt),
`pos` zeigt auf den Listen-Eintrag **vor** dem Listen-Eintrag mit dem aktuellen Element.

Hinweis zur Fehlerbehandlung:
In den folgenden Implementationen wird nach Eintreten einer fehlerhaften Situation durch Werfen einer `RuntimeException` ein Programmabbruch verursacht. Eine erweiterte Fehlerbehandlung (die auch das Abfangen von Fehlern vorsieht) wird in Kapitel 9.3 vorgestellt.

```
/*************************  VerweisListe.java ******************************/
import AlgoTools.IO;

/** Implementation des Interface Liste mithilfe von Verweisen                */

public class VerweisListe implements Liste {

    private static class ListenEintrag {  // innere Klasse
        Object        inhalt;             // Inhalt des ListenEintrags
        ListenEintrag next;               // Verweis auf naechsten ListenEintrag
    }

    private ListenEintrag anf;            // zeigt auf nullten ListenEintrag
    private ListenEintrag pos;            // zeigt vor aktuellen Listeneintrag

    public VerweisListe() {                        // kreiert eine leere Liste
        pos = anf = new ListenEintrag();
        anf.next  = null;
    }

    public boolean empty()                         // true, wenn Liste leer
      { return anf.next == null; }

    public boolean endpos()                        // true, wenn am Ende
      { return pos.next == null; }

    public void reset() {  pos = anf; }            // rueckt an Anfang

    public void advance() {                        // rueckt in Liste vor
        if (endpos()) throw new
          RuntimeException("in VerweisListe.advance");
        pos = pos.next;
    }

    public Object elem() {                         // liefert aktuelles Element
        if (endpos()) throw new
          RuntimeException("in VerweisListe.elem");
        return pos.next.inhalt;
    }

    public void insert(Object x) {                 // fuegt ListenEintrag ein
        ListenEintrag hilf = new ListenEintrag();  // Das neue Listenelement
        hilf.inhalt        = x;                    // kommt vor das aktuelle
        hilf.next          = pos.next;
        pos.next           = hilf;
    }

    public void delete() {                         // entfernt aktuelles Element
        if (endpos()) throw new
          RuntimeException("in VerweisListe.delete");
        pos.next = pos.next.next;
    }
}
```

```
/************************ VerweisListeTest.java  ******************************/

import AlgoTools.IO;

/** Testet die Implementation der VerweisListe                                */

public class VerweisListeTest {

  public static void main (String [] argv) {

    Liste l = new VerweisListe();                          // kreiere Liste
    Student s;                                             // deklariere Student

    s = new Student("Willi","Wacker",22,8,1972,"BWL",1995);// kreiere Student
    l.insert(s);                                           // fuege in Liste ein
    l.advance();                                           // eins weiter in l

    s = new Student("Erika","Muster",28,2,1970,"VWL",1994);// kreiere Student
    l.insert(s);                                           // fuege in Liste ein
    l.advance();                                           // eins weiter in l

    s = new Student("Hein","Bloed",18,5,1973,"CLK",1996);  // kreiere Student
    l.insert(s);                                           // fuege in Liste ein
    l.advance();                                           // eins weiter in l

    s = new Student("Susi","Sorglos",10,7,1973,"JUR",1996);// kreiere Student
    l.insert(s);                                           // fuege in Liste ein

    l.reset();                                             // an den Anfang

    while (!l.endpos()) {                                  // 1.,3.,5.. loeschen
      l.delete();
      if (!l.endpos())
        l.advance();
    }
    l.reset();                                             // an den Anfang

    while (!l.endpos()) {                                  // Liste ausgeben
      IO.println(((Student)l.elem()).vorname
      + " " + ((Student)l.elem()).nachname);
      l.advance();                                         // ein weiter in l
    }
    l.reset();                                             // an den Anfang

    while (!l.empty()) l.delete();                         // Liste loeschen
  }
}
```

9.2 Keller

Def.: Ein *Keller* ist eine (ggf. leere) Folge von Elementen zusammen mit einem so genannten (ggf. undefinierten) *Top*-Element.

Schnittstelle des ADT `Keller`:

`empty`	:	Keller	$\rightarrow$	boolean	liefert `true`, falls Keller leer ist, `false` sonst
`push`	:	Keller $\times$ Objekt	$\rightarrow$	Keller	legt Element auf Keller
`top`	:	Keller	$\rightarrow$	Objekt	liefert oberstes Element
`pop`	:	Keller	$\rightarrow$	Keller	entfernt oberstes Element

Semantik der Kelleroperationen (LIFO: Last in, first out):

A1) Ein neu konstruierter Keller ist leer.

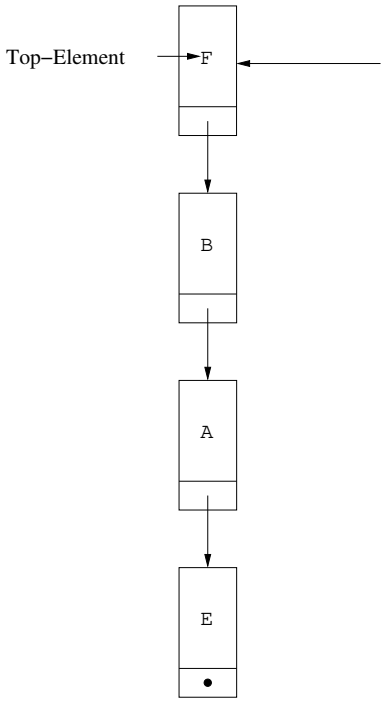
A2) Nach einer `Push`-Operation ist ein Keller nicht leer.

A3) Nach einer `Push-Pop`-Operation ist der Keller unverändert.

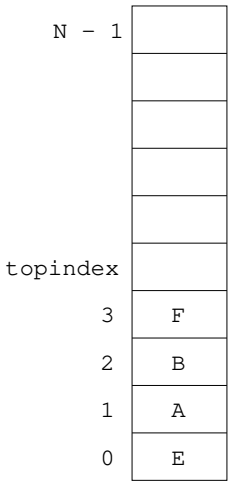
A4) Nach der `Push`-Operation mit dem Element x liefert die `Top`-Operation das Element x.

```
/****************************  Keller.java  **********************************/

/** Interface fuer den ADT Keller                                            */

public interface Keller {

    public boolean empty();     // liefert true, falls Keller leer, false sonst

    public void push(Object x); // legt Objekt x auf den Keller

    public Object top();        // liefert oberstes Kellerelement

    public void pop();          // entfernt oberstes Kellerelement
}
```

Implementation eines Kellers mit Verweisen



Implementation eines Kellers mit einem Array (LIFO: Last in, first out)



```
/***************************  VerweisKeller.java ******************************/

import AlgoTools.IO;

/** Implementation eines Kellers mithilfe von Verweisen                       */

public class VerweisKeller implements Keller {

    private static class KellerEintrag { // innere Klasse
        Object inhalt;                   // Inhalt des KellerEintrags
        KellerEintrag next;              // Verweis auf naechsten KellerEintrag
    }

    private KellerEintrag top;           // verweist auf obersten KellerEintrag

    public VerweisKeller() {                            // legt leeren Keller an
        top = null;
    }

    public boolean empty() {                            // liefert true,
        return top == null;                             // falls Keller leer
    }

    public void push(Object x) {                        // legt Objekt x
        KellerEintrag hilf = new KellerEintrag();       // auf den Keller
        hilf.inhalt = x;
        hilf.next   = top;
        top         = hilf;
    }

    public Object top() {                               // liefert Top-Element
        if (empty()) throw new
          RuntimeException("in VerweisKeller.top");
        return top.inhalt;
    }

    public void pop() {                                 // entfernt Top-Element
        if (empty()) throw new
          RuntimeException("in VerweisKeller.pop");
        top = top.next;
    }
}
```

```
/****************************  Reverse.java  *********************************/

import AlgoTools.IO;

/** Liest eine Folge von ganzen Zahlen ein
 *  und gibt sie in umgekehrter Reihenfolge wieder aus.
 *  Verwendet wird die Wrapper-Klasse Integer,
 *  welche Objekte vom einfachen Typ int enthaelt.
 *  Vor dem Einfuegen in den Keller werden mit new Integer diese Objekte
 *  erzeugt, nach dem Auslesen aus dem Keller werden sie nach int gecastet.
 */

public class Reverse {

  public static void main (String [] argv) {

    Keller k = new VerweisKeller();                 // lege leeren Keller an

    int[] a = IO.readInts("Bitte Zahlenfolge:   "); // lies Integer-Folge ein

    for (int i=0; i<a.length; i++)                  // pushe jede Zahl als
        k.push(new Integer(a[i]));                  // Integer-Objekt

    IO.print("Umgekehrte Reihenfolge:");
    while (!k.empty()) {                            // solange Keller nicht leer
        IO.print(" "+((Integer)k.top()).intValue());// gib Top-Element aus
        k.pop();                                    // entferne Top-Element
    }
    IO.println();
  }
}
```

```
/****************************  Klammer.java  *********************************/

import AlgoTools.IO;

/** Ueberprueft Klammerung mit Hilfe eines Kellers
 */

public class Klammer {

  public static void main(String[] argv) {

    char[] c;                             // Eingabezeichenkette
    int i = 0;                            // Laufindex in char[] c
    boolean fehler = false;               // Abbruchkriterium
    Keller k = new VerweisKeller();       // Keller fuer Zeichen

    c = IO.readChars("Bitte Klammerausdruck eingeben: ");
    IO.print("                                 ");

    while ((i < c.length) && (!fehler)) {
      switch (c[i]) {
        case '(':                         // '(' und '[' auf den Keller legen
        case '[': k.push(new Character(c[i])); break;
        case ')': if (!k.empty() && ((Character)k.top()).charValue() == '(')
                       k.pop();           // '(' vom Keller nehmen
                  else fehler = true; break;
        case ']': if (!k.empty() && ((Character)k.top()).charValue() == '[')
                       k.pop();           // '[' vom Keller nehmen
                  else fehler = true; break;
        default:  break;                  // beliebiges Zeichen, keine Klammer
      }
      IO.print(" ");                      // naechstes Zeichen
      i++;
    }

    if (!fehler && k.empty())
         IO.println("korrekt geklammert");
    else IO.println("^ nicht korrekt geklammert");
  }
}
```

```
/****************************  CharKeller.java  ****************************/

import AlgoTools.IO;

/** Abstrakter Datentyp Character-Keller mit Elementen vom Typ char          */

public class CharKeller extends VerweisKeller {

    public void push(char x) {                  // legt char x auf den Keller
        push(new Character(x));
    }

    public char ctop() {                        // liefert oberstes Kellerelement
        return ((Character)top()).charValue();
    }
}


/****************************  Postfix.java  ********************************/

import AlgoTools.IO;

/** Wandelt Infix-Ausdruck in Postfix-Ausdruck um.
 *  Vorausgesetzt wird eine syntaktisch korrekte Eingabe,
 *  bestehend aus den Operatoren +,-,*,/ sowie den Operanden a,b,...,z
 *  und den oeffnenden und schliessenden Klammern. Beispiel:(a+b)*c-d/f
 *  Ausgabe ist der aequivalente Postfixausdruck.  Beispiel: ab+c*df/-
 *  Verwendet wird ein Character-Keller, der die bereits gelesenen
 *  oeffnenden Klammern sowie die Operatoren speichert.
 */

public class Postfix {

  public static void main(String[] argv) {

    CharKeller k = new CharKeller();                  // Character-Keller
    char[] infix;                                     // Eingabezeile
    char c;                                           // aktuelles Zeichen

    infix = IO.readChars("Bitte Infix-Ausdruck (+,-,*,/,a,...,z): ");
    IO.print("umgewandelt in Postfix:                 ");

    for (int i=0; i<infix.length; i++) {              // durchlaufe Infixstring

        c = infix[i];                                 // aktuelles Zeichen
        switch (c) {

            case '('  :  k.push(c);                   // '(' auf den Stack
                         break;


            case ')'  :  while ( k.ctop() != '(' ) {  // Keller bis vor '('
                             IO.print(k.ctop());      // ausgeben
```

```
                            k.pop();                    // und leeren
                        }
                        k.pop();                        // und '(' entfernen
                        break;


            case '+'  :
            case '-'  :  while (!k.empty()              // Keller bis vor erste
                                && k.ctop() != '(') {   // oeffnende Klammer
                            IO.print(k.ctop());         // ausgeben
                            k.pop();                    // und leeren
                        }
                        k.push(c);                      // lege letztes Zeichen ab
                        break;


            case '*'  :
            case '/'  :  if (!k.empty()                 // solange Keller
                            && (k.ctop()=='*'           // * enthaelt
                            || k.ctop()=='/')) {        // oder / enthaelt
                                IO.print(k.ctop());     // gib Operator aus
                                k.pop();                // und entferne ihn
                        }
                        k.push(c);                      // lege letztes Zeichen ab
                        break;


            default   :  if (c>='a' && c<='z')          // falls Operand vorliegt
                            IO.print(c);                // direkt ausgeben
        }
    }

    while (!k.empty()) {                                // beim Eingabeende
        IO.print(k.ctop());                             // Keller ausgeben
        k.pop();                                        // und leeren
    }
    IO.println();
  }
}
```

9.3 Exceptions: throw + try + catch

Über das Auslösen einer *RuntimeException* hinaus besteht in Java die Möglichkeit, eigene Fehlerklassen zu definieren. Dies bedeutet, daß bei Vorliegen eines fehlerhaften Zustands eine speziell entworfene Fehlerbedingung geworfen wird und längs der geschachtelten Aufrufhierarchie jede Methode versuchen kann, diese Fehlermeldung zu fangen. Dieses Konzept wird über die Vokabeln `throw`, `try` und `catch` realisiert.

Im folgenden Beispiel wird zunächst eine eigene, von der Klasse `Exception` abgeleitete, Fehlerklasse `KellerFehler` formuliert.

Die Klasse `AusnahmeKeller` unterscheidet sich von der bereits eingeführten Klasse `Keller` nur dadurch, daß in den Methoden `top` und `pop` anstelle der `RuntimeException` nun der eigens definierte `KellerFehler` geworfen wird.

Die Klasse `AusnahmeKellerTest` liest analog zur Klasse `Reverse` eine Zahlenfolge ein und gibt sie in umgekehrter Reihenfolge wieder aus. Durch die Verwendung eines AusnahmeKellers kann ein eventuell auftretender Fehler abgefangen und behandelt werden.

```
/************************** KellerFehler.java    ****************************/

/** Definition einer eigenen Ausnahme                                      */

public class KellerFehler  extends Exception   {

  public KellerFehler (String s) { super(s); };

}
```

```
/************************** AusnahmeKeller.java ******************************/

/** Implementation eines Kellers unter Verwendung von eigenen Exceptions
    (Obacht: ohne Bezug auf das Interface Keller ! )                          */

public class AusnahmeKeller {

    private static class KellerEintrag {
        Object inhalt;                  // Inhalt des KellerEintrags
        KellerEintrag next;             // Verweis auf naechsten KellerEintrag
    }

    private KellerEintrag top;          // zeigt auf obersten KellerEintrag

    public AusnahmeKeller () {                          // legt leeren Keller an
        top = null;
    }

    public boolean empty() {                            // liefert true,
        return top == null;                             // falls Keller leer
    }

    public void push(Object x) {                        // legt Objekt x
        KellerEintrag hilf = new KellerEintrag();       // auf den Keller
        hilf.inhalt = x;
        hilf.next   = top;
        top         = hilf;
    }

    public Object top() throws KellerFehler {           // liefert oberstes
        if (empty())                                    // Kellerelement
          throw new KellerFehler("in top: Keller leer");
        return top.inhalt;
    }

    public void pop() throws KellerFehler  {            // entfernt oberstes
        if (empty())                                    // Kellerelement
          throw new KellerFehler("in pop: Keller leer");
        top = top.next;
    }
}
```

```
/********************** AusnahmeKellerTest **********************************/

import AlgoTools.IO;

/** Liest eine Folge von ganzen Zahlen ein
 *  und gibt sie in umgekehrter Reihenfolge wieder aus.
 *  Verwendet wird die Wrapper-Klasse Integer,
 *  welche Objekte vom einfachen Typ int enthaelt.
 *  Vor dem Einfuegen in den Keller werden mit new Integer diese Objekte
 *  erzeugt, nach dem Auslesen aus dem Keller werden sie nach int gecastet.
 */

public class AusnahmeKellerTest {

  public static void main (String [] argv) {

    AusnahmeKeller k = new AusnahmeKeller();        // lege leeren Keller an

    int[]a = IO.readInts("Bitte Zahlenfolge:    "); // lies Integer-Folge ein

    try {                                           // versuche

      for (int i=0; i<a.length; i++)                // pushe jede Zahl als
        k.push(new Integer(a[i]));                  // Integer-Objekt

      IO.print("Umgekehrte Reihenfolge:");
      while (!k.empty()) {                          // solange Keller nicht leer
        IO.print(" "+((Integer)k.top()).intValue());// drucke
        k.pop();                                    // entferne Top-Element
      }
      IO.println();

    } catch (KellerFehler e) {                      // behandle Kellerfehler
        IO.println("Problem im Keller: " + e);
    }
  }
}
```

9.4 Schlange

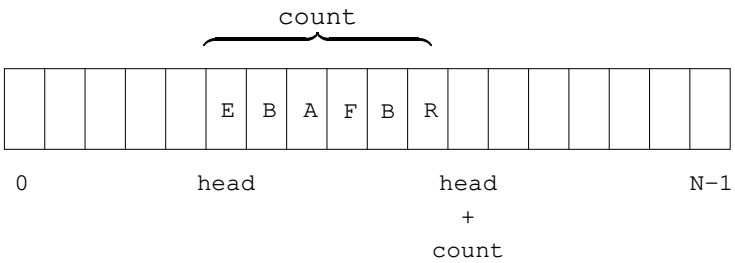
Def.: Eine *Schlange* ist eine (ggf. leere) Folge von Elementen zusammen mit einem so genannten (ggf. undefinierten) *Front*-Element.

Schnittstelle des ADT `Schlange`:

`enq`	:	Schlange × Objekt	→	Schlange	fügt Element hinten ein
`deq`	:	Schlange	→	Schlange	entfernt vorderstes Element
`front`	:	Schlange	→	Objekt	liefert vorderstes Element
`empty`	:	Schlange	→	boolean	liefert `true`, falls Schlange leer ist, `false` sonst

```
/******************************  Schlange.java  ******************************/

/** Interface zum ADT Schlange                                              */

public interface Schlange {

  public void enq( Object x );            // Fuegt x hinten ein

  public void deq();                      // Entfernt vorderstes Element

  public Object front();                  // Liefert vorderstes Element

  public boolean empty();                 // Testet, ob Schlange leer ist
}
```

Konzept zur Implementation einer Schlange mit einem Array:



```
/************************** ArraySchlange.java ******************************/

import AlgoTools.IO;

/** Implementation des Interface Schlange mit Hilfe eines Arrays             */

public class ArraySchlange implements Schlange {

    private Object[] inhalt;                 // Array fuer Schlangenelemente
    private int head;                        // Index fuer Schlangenanfang
    private int count;                       // Anzahl Schlangenelemente

    public ArraySchlange(int N) {            // Konstruktor fuer leere Schlange
        inhalt = new Object[N];              // besorge Platz fuer N Objekte
        head    = 0;                         // initialisiere Index fuer Anfang
        count   = 0;                         // initialisiere Anzahl
    }

    private boolean full() {                 // Testet, ob Schlange voll ist
        return count==inhalt.length;         // Anzahl gleich Arraylaenge?
    }

    public boolean empty() {                 // Testet, ob Schlange leer ist
        return count==0;                     // Anzahl gleich 0?
    }

    public void enq( Object x ) {            // Fuegt x hinten ein
        if (full()) throw new RuntimeException("in ArraySchlange.enq");
        inhalt[(head+count)%inhalt.length]=x;// Element einfuegen
        count++;                             // Anzahl inkrementieren
    }

    public void deq() {                      // Entfernt vorderstes Element
        if (empty()) throw new RuntimeException("in ArraySchlange.deq");
        inhalt[head] = null;                 // Verweis auf null setzen
        head = (head + 1) % inhalt.length;   // Anfang-Index weiterruecken
        count--;                             // Anzahl dekrementieren
    }

    public Object front() {                  // Liefert Element,
        if (empty()) throw new RuntimeException("in ArraySchlange.front");
        return inhalt[head];                 // welches am Anfang-Index steht
    }
}
```

```
/**************************** ArraySchlangeTest.java *************************/

import AlgoTools.IO;

/** Programm zum Testen der Methoden des ADT Schlange.
 *  Liest Zeichenketten und reiht sie in eine Schlange ein.
 *  Bei Eingabe einer leeren Zeichenkette wird die jeweils vorderste
 *  aus der Schlange ausgegeben und entfernt.
 */

public class ArraySchlangeTest {

  public static void main(String [] argv) {

    Schlange q = new ArraySchlange(100);          // konstruiere Schlange mit
                                                  // Platz fuer 100 Objekte

    IO.println("Bitte Schlange fuellen durch Eingabe eines Wortes.");
    IO.println("Bitte Schlangen-Kopf entfernen durch Eingabe von RETURN.");

    do {                                          // Beginn der Schleife

      String eingabe = IO.readString("Input: ");  // fordere String an

      if ( eingabe.length()>0 )                   // falls Eingabe != RETURN

          q.enq(eingabe);                         // fuege in Schlange ein

      else                                        // falls EINGABE == RETURN

          if ( !q.empty() ){                      // sofern Schlange nicht leer
              IO.println("entfernt: " +           // kuendige Ausgabe des
                         q.front() );             // Frontelements an
              q.deq();                            // entferne Frontelement
          }

    } while ( !q.empty() );                       // Ende der Schlangen-Schleife
    IO.println("Schlange ist jetzt leer.");
  }
}
```

9.5 Baum

Def.: Ein *binärer Baum* ist entweder leer oder besteht aus einem Knoten, dem ein Element und zwei binäre Bäume zugeordnet sind.

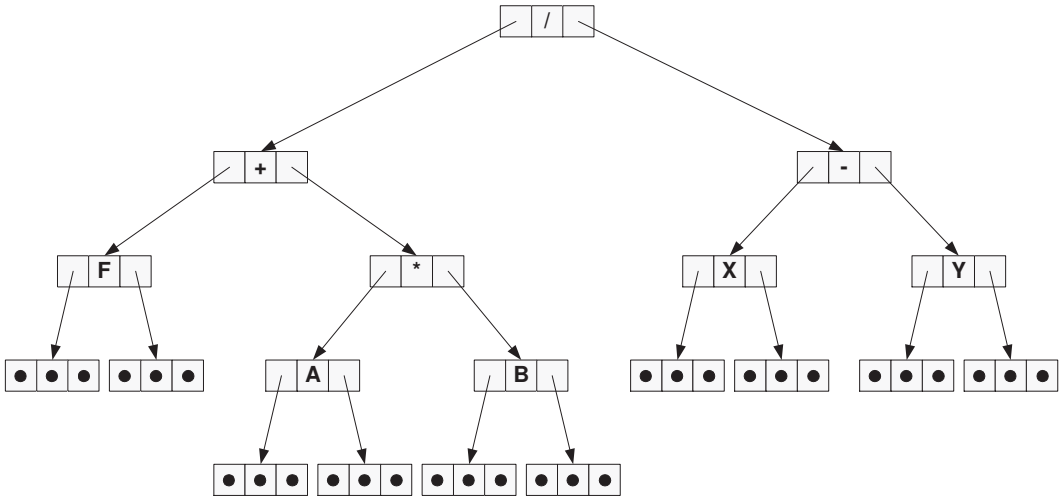
Schnittstelle des ADT `Baum`:

`empty`	:	Baum	→	boolean	liefert `true`, falls Baum leer ist
`left`	:	Baum	→	Baum	liefert linken Teilbaum
`right`	:	Baum	→	Baum	liefert rechten Teilbaum
`value`	:	Baum	→	Objekt	liefert Wurzelelement

```
/********************************  Baum.java  *********************************/
/** Interface Baum mit 6 Methoden.  */

public interface Baum {

  public boolean empty ();                  // liefert true, falls Baum leer ist

  public Baum left ();                      // liefert linken Teilbaum

  public Baum right ();                     // liefert rechten Teilbaum

  public Object value ();                   // liefert Objekt in der Wurzel

  public void setValue(Object x);           // setzt x in die Wurzel

  public void setLeft(Baum b);              // haengt b als linken Teilbaum an

  public void setRight(Baum b);             // haengt b als rechten Teilbaum an

}
```

Konzept zur Implementation eines Baumes mit Verweisen

(Obacht: Aus technischen Gründen hat jedes Blatt zwei Verweise auf leere Bäume. Hierdurch vereinfachen sich gewisse Operationen auf dem später noch einzuführenden Suchbaum.)



Traversierungen

Eine Traversierung eines binären Baumes besteht aus dem systematischen Besuchen aller Knoten in einer bestimmten Reihenfolge.

Traversierungen dieses Baumes

Preorder:	`/ + F * A B - X Y`
Inorder:	`F + A * B / X - Y`
Postorder:	`F A B * + X Y - /`
Klammerinorder:	`( ( F + ( A * B) ) / ( X - Y ) )`

```
/***************************  VerweisBaum.java ******************************/
import AlgoTools.IO;

/** Klasse VerweisBaum mit einem Konstruktor und 6 Methoden.
 *  Ein VerweisBaum besteht aus den Datenfeldern inhalt, links, rechts.      */

public class VerweisBaum implements Baum{

  Object inhalt;                              // Inhalt
  VerweisBaum links, rechts;                  // linker, rechter Teilbaum

  public VerweisBaum () {                     // konstruiert einen leeren Baum
    inhalt = null;                            // kein Inhalt
    links  = null;                            // kein linker Sohn
    rechts = null;}                           // kein rechter Sohn

  public boolean empty () {                   // liefert true,
    return (inhalt == null);}                 // falls Baum leer ist

  public Object value () {                    // liefert Objekt in der Wurzel
    if (empty()) throw new
    RuntimeException("in VerweisBaum.value");
    return inhalt;}

  public Baum left () {                       // liefert linken Teilbaum
    if (empty()) throw new
    RuntimeException("in VerweisBaum.left");
    return links;}

  public Baum right () {                      // liefert rechten Teilbaum
    if (empty()) throw new
    RuntimeException("in VerweisBaum.right");
    return rechts;}

  public void setValue(Object x) {            // setzt x in die Wurzel
    if (empty()) {                            // falls der Baum leer ist
      links = new VerweisBaum();              // lege ein Blatt an
      rechts= new VerweisBaum();
    }
    inhalt = x;}                              // setze x in Wurzel

  public void setLeft(Baum b) {               // haengt b als linken Teilbaum an
    if (empty()) throw new
    RuntimeException("in VerweisBaum.setLeft");
    links = (VerweisBaum) b;}

  public void setRight(Baum b) {              // haengt b als rechten Teilbaum an
    if (empty()) throw new
    RuntimeException("in VerweisBaum.setRight");
    rechts = (VerweisBaum) b;}
}
```

```
/***************************  Traverse.java  **********************************/

import AlgoTools.IO;

/** Klasse Traverse
 *  bestehend aus vier statischen Methoden
 *  zum Traversieren von Baeumen
 */

public class Traverse {

  public static void inorder(Baum b) {         // Inorder-Traversierung
    if (!b.empty()) {                          // falls Baum nicht leer,
        inorder (b.left());                    // steige links ab
        IO.print(b.value());                   // gib Knoteninhalt aus
        inorder (b.right());                   // steige rechts ab
    }
  }

  public static void preorder(Baum b) {        // Preorder-Traversierung
    if (!b.empty()) {                          // falls Baum nicht leer,
        IO.print(b.value());                   // gib Knoteninhalt aus
        preorder(b.left());                    // steige links ab
        preorder(b.right());                   // steige rechts ab
    }
  }

  public static void postorder(Baum b) {       // Postorder-Traversierung
    if (!b.empty()) {                          // falls Baum nicht leer,
        postorder(b.left());                   // steige links ab
        postorder(b.right());                  // steige rechts ab
        IO.print (b.value());                  // gib Knoteninhalt aus
    }
  }

  public static void klammerinorder(Baum b) { // Klammerinorder-Traversierung
    if (!b.empty()) {                          // falls Baum nicht leer
      if (!b.left().empty()) IO.print("(");    // "("
      klammerinorder(b.left());                // linker Sohn
      IO.print(b.value());                     // Wurzel von b
      klammerinorder(b.right());               // rechter Sohn
      if (!b.right().empty()) IO.print(")");   // ")"
    }
  }
}
```

```
/*****************************  TiefenSuche.java  ***************************/

import AlgoTools.IO;

/** Klasse Tiefensuche enthaelt statische Methode tiefenSuche,
 *  die mit Hilfe eines Kellers eine iterative Tiefensuche
 *  auf einem Baum durchfuehrt (= preorder)
 */

public class TiefenSuche {

  public static void tiefenSuche (Baum wurzel) { // starte bei wurzel

    Baum b;                                 // Hilfsbaum

    Keller k = new VerweisKeller();         // konstruiere einen Keller

    if (!wurzel.empty()) k.push(wurzel);    // lege uebergebenen Baum in Keller

    while (!k.empty()) {                    // solange Keller noch Baeume enthaelt

        b = (Baum)k.top();                  // besorge Baum aus Keller
        k.pop();                            // und entferne obersten Eintrag

        do {
            IO.print(b.value());            // gib Wert der Baumwurzel aus
            if (!b.right().empty())         // falls es rechten Sohn gibt,
                k.push(b.right());          // lege rechten Sohn auf den Keller
            b = b.left();                   // gehe zum linken Sohn
        } while (!b.empty());               // solange es linken Sohn gibt
    }
  }
}
```

```
/******************************  BreitenSuche.java  **************************/

import AlgoTools.IO;

/** Klasse BreitenSuche enthaelt statische Methode breitenSuche,
 *  die mit Hilfe einer Schlange eine iterative Breitensuche
 *  auf einem Baum durchfuehrt
 */

public class BreitenSuche {

  public static void breitenSuche (Baum wurzel) {// starte bei wurzel

    Baum b;                                 // Hilfsbaum

    Schlange s = new ArraySchlange(100);  // konstruiere eine Schlange

    if (!wurzel.empty()) s.enq(wurzel);   // lege uebergebenen Baum in Schlange

    while (!s.empty()) {                  // solange Schlange nicht leer

        b = (Baum)s.front();              // besorge Baum aus Schlange
        s.deq();                          // und entferne vordersten Eintrag

        IO.print(b.value());              // gib Wert der Baumwurzel aus

        if (!b.left().empty())            // falls es linken Sohn gibt,
               s.enq(b.left());           // haenge linken Sohn an Schlange
        if (!b.right().empty())           // falls es rechten Sohn gibt,
               s.enq(b.right());          // haenge rechten Sohn an Schlange
    }
  }
}
```

```
/****************************  TraverseTest.java  ****************************/
                                                          //         '/'
import AlgoTools.IO;                                      //      /       \
                                                          //      +       -
/** Traversierungen des binaeren Baums mit Operanden in  //    /   \   /   \
 *  den Blaettern und Operatoren in den inneren Knoten:  //    F   *   X   Y
 */                                                       //       / \
                                                          //       A B
public class TraverseTest {

  public static void main(String[] argv) {

    VerweisBaum a = new VerweisBaum(); a.setValue(new Character('A'));
    VerweisBaum b = new VerweisBaum(); b.setValue(new Character('B'));
    VerweisBaum m = new VerweisBaum(); m.setValue(new Character('*'));
    VerweisBaum f = new VerweisBaum(); f.setValue(new Character('F'));
    VerweisBaum p = new VerweisBaum(); p.setValue(new Character('+'));
    VerweisBaum x = new VerweisBaum(); x.setValue(new Character('X'));
    VerweisBaum y = new VerweisBaum(); y.setValue(new Character('Y'));
    VerweisBaum n = new VerweisBaum(); n.setValue(new Character('-'));
    VerweisBaum d = new VerweisBaum(); d.setValue(new Character('/'));
    m.setLeft(a); m.setRight(b);       p.setLeft(f); p.setRight(m);
    n.setLeft(x); n.setRight(y);       d.setLeft(p); d.setRight(n);

    IO.print("Preorder:        ");
    Traverse.preorder(d);          IO.println(); // Ausgabe: /+F*AB-XY

    IO.print("Inorder:         ");
    Traverse.inorder(d);           IO.println(); // Ausgabe: F+A*B/X-Y

    IO.print("Postorder:       ");
    Traverse.postorder(d);         IO.println(); // Ausgabe: FAB*+XY-/

    IO.print("Klammer-Inorder: ");
    Traverse.klammerinorder(d);    IO.println(); // Ausgabe: ((F+(A*B))/(X-Y))

    IO.print("Tiefensuche:     ");
    TiefenSuche.tiefenSuche(d);    IO.println(); // Ausgabe: /+F*AB-XY

    IO.print("Breitensuche:    ");
    BreitenSuche.breitenSuche(d);  IO.println(); // Ausgabe: /+-F*XYAB

  }
}
```

```
/******************************  PostfixBaumBau.java  ************************/

import AlgoTools.IO;

/** Klasse PostfixBaumBau enthaelt statische Methode postfixBaumBau,
 *  die einen Postfix-Ausdruck uebergeben bekommt
 *  und den zugehoerigen Baum zurueckliefert.
 *  Verwendet wird ein Keller ueber Baeumen.
 */

public class PostfixBaumBau {

  public static Baum postfixBaumBau (char[]ausdruck) { // konstruiert Baum

    Baum b;                                          // Hilfsbaum
    char c;                                          // Zeichen

    Keller k = new VerweisKeller();                  // konstruiere einen Keller

    for (int i=0; i < ausdruck.length; i++) {        // durchlaufe Postfix-Ausdruck

      c = ausdruck[i];                               // besorge naechstes Zeichen
      b = new VerweisBaum();                         // erzeuge leeren Baum
      b.setValue(new Character(c));                  // mache daraus ein Blatt

      if (c=='+' || c=='-' || c=='*'|| c=='/'){      // falls c ein Operator ist

        b.setRight((Baum)k.top()); k.pop();          // haenge rechten Sohn ein
        b.setLeft ((Baum)k.top()); k.pop();          // haenge linken Sohn ein

      }

      k.push(b);                                     // lege Baum auf Keller
    }
    return (Baum)k.top();                            // gib Ergebnisbaum zurueck
  }

  public static void main (String [] argv) {
    char [] zeile = IO.readChars("Bitte Postfix-Ausdruck: ");  // lies Postfix
    Baum wurzel = postfixBaumBau(zeile);             // konstruiere daraus Baum
    IO.print("Inorder lautet:         ");            // kuendige Traversierung an
    Traverse.klammerinorder(wurzel);                 // gib in Klammer-Inorder aus
    IO.println();
  }
}
```

```
/************************* PreorderTraverse.java ******************************/

import java.util.Enumeration;
/** Schrittweise Preordertraversierung eines Baumes mit Interface Enumeration */

public class PreorderTraverse implements Enumeration{

  private Keller k;                             // Keller zum Zwischenspeichern

  public PreorderTraverse(Baum wurzel) {        // Konstruktor,
    k = new VerweisKeller();                    // besorge Verweiskeller
    if (!wurzel.empty()) k.push(wurzel);        // initialisiert Keller
  }

  public boolean hasMoreElements() {            // liefert true
    return !k.empty();                          // falls noch Elemente
  }                                             // im Keller sind

  public Object nextElement() {
    Baum b = (Baum)k.top();                     // hole Baum vom Keller
    k.pop();                                    // entferne Top-Element
    if (!b.right().empty()) k.push(b.right()); // lege rechten Sohn auf Keller
    if (!b.left().empty())  k.push(b.left());  // lege linken Sohn auf Keller
    return b;                                   // liefere Baum ab
  }
}

/****************************  PostfixPreorderTest.java  ********************/

import AlgoTools.IO;
import java.util.Enumeration;

/** Klasse PostfixPreorderTest konstruiert unter Verwendung von PostfixBaumBau
    einen Baum aus dem eingelesenen String und gibt ihn in Preorder-Notation
    aus unter Verwendung von PreorderTraverse                                */

public class PostfixPreorderTest {

 public static void main (String [] argv) {

    char[]zeile=IO.readChars("Bitte Postfix-Ausdruck:");// lies Postfixausdruck
    Baum wurzel =PostfixBaumBau.postfixBaumBau(zeile);  // konstruiere daraus
                                                        // einen Baum
    IO.println("Umwandlung in Prefix-Notation:");
    PreorderTraverse pre = new PreorderTraverse(wurzel);// erzeuge Enumeration
    while (pre.hasMoreElements()) {                     // solange Elemente da
      Baum t = (Baum) pre.nextElement();                // besorge Element
      IO.print(t.value());                              // gib Wert aus
    }
    IO.println();
  }
}
```

9.6 Suchbaum

Def.: Ein binärer *Suchbaum* ist ein binärer Baum, bei dem alle Einträge im linken Teilbaum eines Knotens x kleiner sind als der Eintrag im Knoten x und bei dem alle Einträge im rechten Teilbaum eines Knotens x größer sind als der Eintrag im Knoten x.

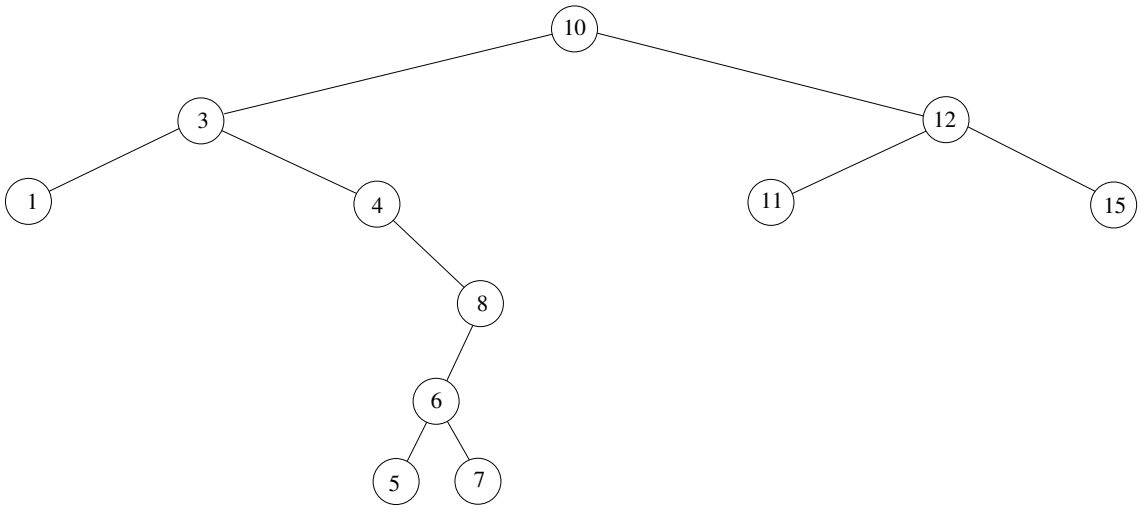
Der Aufwand aller Suchbaumoperationen ist proportional zur Anzahl der Knoten auf dem Wege von der Wurzel bis zu einem Blatt.

Best case: Hat jeder Knoten 2 Söhne, so hat der Baum bei Höhe h $n = 2^h - 1$ Knoten. Die Anzahl der Weg-Knoten ist $h = \log(n)$.

Worst case: Werden die Elemente sortiert eingegeben, so entartet der Baum zur Liste, der Aufwand beträgt dann $O(n)$.

Average case: Für n zufällige Schlüssel beträgt der Aufwand $O(\log(n))$, genauer: Die Wege sind um 39 % länger als im best case.

Beispiel für einen binären Suchbaum



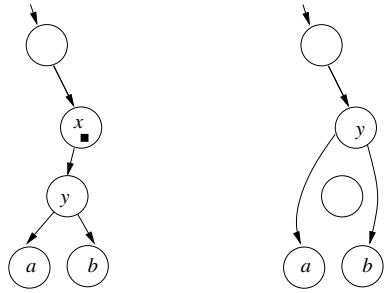
Damit die Algorithmen zur Navigation in einem Suchbaum für beliebige Objekte formuliert werden können, wird ein Interface `Comparable` verwendet, welches eine Methode `compareTo` ankündigt. Diese Methode muß von jedem Anwender bezogen auf die von ihm zu speichernden Objekte implementiert werden (z.B. als `CharComparable` oder `StringComparable`. Der Suchbaum wiederum implementiert ein Interface `Menge`, welches die grundsätzlichen Methoden zum Verwalten einer Menge von Objekten ankündigt: `lookup`, `insert` und `delete`.

In den folgenden drei Grafiken wird mit einem gefüllten Kreis der NULL-Zeiger visualisiert und mit einem gefüllten Quadrat der Verweis auf einen leeren Baum (bestehend aus einem Knoten mit drei Nullzeigern).

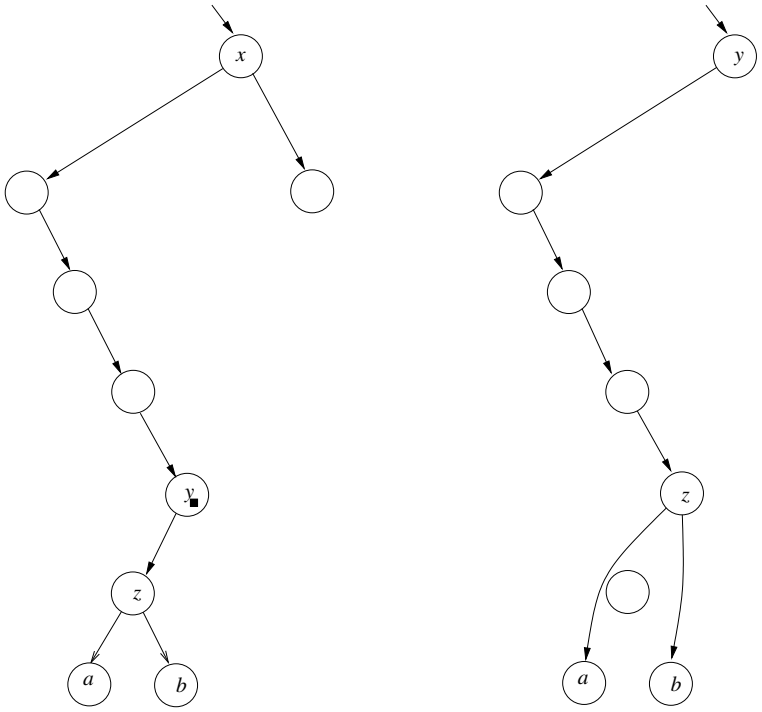
Sei x das Element in dem zu löschenden Knoten des Suchbaums.

Löschen eines Knotens ohne Söhne

Löschen eines Knotens mit einem Sohn



Löschen eines Knotens mit zwei Söhnen



```
/***************************  Comparable.java  ******************************/

/**   Das Interface deklariert eine Methode, anhand der sich das aufgerufene
 *    Objekt mit dem uebergebenen vergleicht. Fuer jeden von Object
 *    abgeleiteten Datentyp muss eine solche Vergleichsklasse implementiert
 *    werden. Die Methode erzeugt eine Fehlermeldung, wenn a ein Objekt einer
 *    anderen Klasse als dieses Objekt ist.
 *
 *    int compareTo(Object a)
 *         liefert  0, wenn this == a
 *         liefert <0, wenn this <  a
 *         liefert >0, wenn this >  a
 *
 *    Bemerkung: Dieses Interface gibt es bereits in java.lang
 */

public interface Comparable {

    public int compareTo(Object a);
}


/*************************  CharComparable.java ******************************/

import AlgoTools.IO;

/**  Implementiert das Interface Comparable fuer den einfachen Datentyp char */

public class CharComparable implements Comparable {

  private char c;                              // lokale Varibale

  public CharComparable(char c) { this.c=c;}  // Konstruktor

  public int compareTo(Object a) {             // vergleicht Objekte
    if(!(a instanceof CharComparable))         // Ist a ein Objekt dieser Klasse?
      throw new RuntimeException               // falls nicht: Fehlermeldung
      ("CharComparable.compareTo:a("
        + a + ")ist kein CharComparable!");

    return (c - ((CharComparable)a).c);        // liefert  0, wenn this == a
                                               // liefert <0, wenn this <  a
                                               // liefert >0, wenn this >  a
  }

  public String toString()                     // Darstellung des Objects
  { return "" + c ; }
}
```

```
/**********************  StringComparable.java ********************************/
import AlgoTools.IO;

/**  Implementiert das Interface Comparable fuer Strings                      */

public class StringComparable implements Comparable {

  private String s;                              // lokale Variable
  public StringComparable(String s)              // Konstruktor
    { this.s = s; }

  public int compareTo(Object a){
      //  vergleicht beide Strings (d.h. sich selbst mit dem uebergebenen)
      //  liefert  0, wenn die Strings gleich sind
      //  liefert <0, wenn dieser String lexikografisch kleiner als String a ist
      //  liefert >0, andersrum

    if(! (a instanceof StringComparable))        // liegt ein String vor ?
      throw new RuntimeException                 // falls nicht: Fehlermeldung
      ("StringComparable.compare:a("
       + a + ") ist kein StringComparable!");

    return s.compareTo(((StringComparable)a).s); // benutzt zum Vergleich
                                                 // die Methode compareTo
                                                 // der Klasse String
  }

  public String toString() { return s; }         // Darstellung des Objekts
}


/******************************  Menge.java ** ******************************/

/** Interface zum Verwalten einer Menge von Comparable-Objekten.             */

public interface Menge {

    public Comparable lookup(Comparable x);   // Sucht x in Menge
                                              // falls gefunden:
                                              // liefert Comparable-Object
                                              // null sonst

    public boolean insert(Comparable x); // versucht x in Menge einzufuegen
                                         // liefert false, falls schon vorhanden
                                         // liefert true, sonst

    public boolean delete(Comparable x); // versucht x aus Menge zu entfernen
                                         // liefert false, falls nicht vorhanden
                                         // liefert true, sonst

}
```

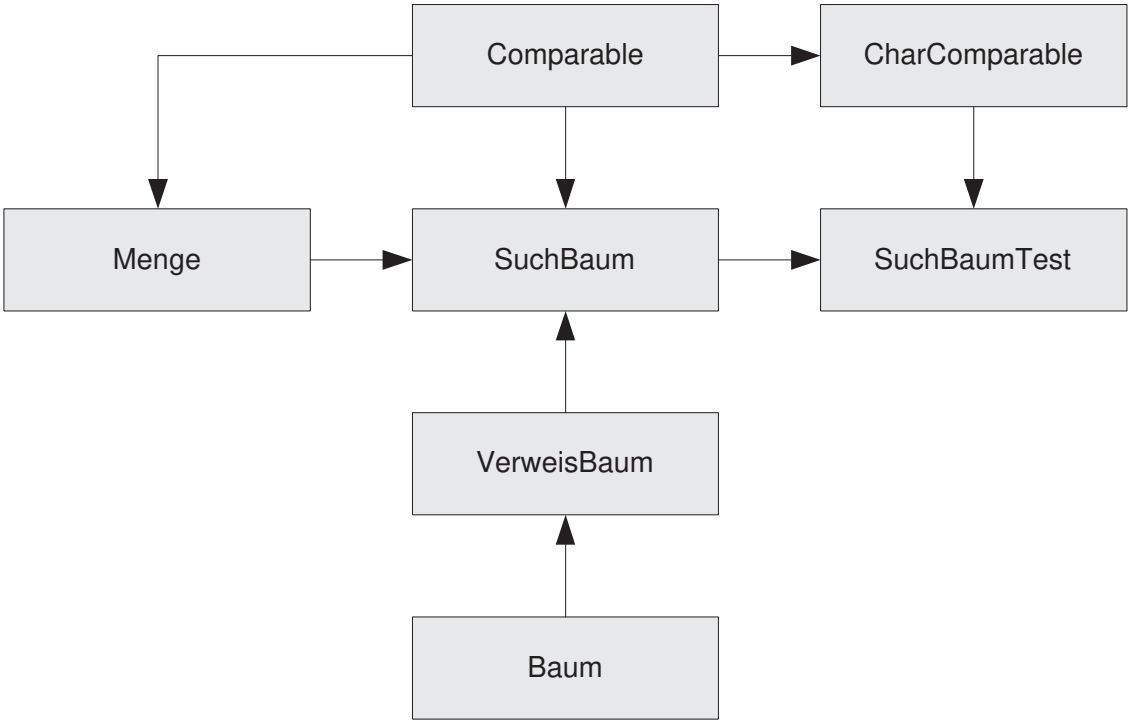
```
/******************************  SuchBaum.java ******************************/

import AlgoTools.IO;

/** Implementation eines binaeren Suchbaums ueber Comparable-Objekten.
    Bereitgestellt werden die im Interface Menge angekuendigten Methoden
    lookup, insert und delete als oeffentliche Methoden.

    Zur Implementation wird von allen dreien die private Methode find benutzt,
    die fuer die Navigation im Baum zustaendig ist.

    Die Methode delete verwendet zusaetzlich noch die private Methode findMax.
*/


public class SuchBaum extends VerweisBaum implements Menge {


  private SuchBaum find(Comparable x) {              // liefert den Suchbaum
                                                     // mit x in der Wurzel
                                                     // (ggf. leerer Baum)
    if (empty())                                  return this;
    if(((Comparable)value()).compareTo(x) == 0)   return this;
    if(((Comparable)value()).compareTo(x) >  0)   return
       ((SuchBaum)left()).find(x);
    else                                          return
       ((SuchBaum)right()).find(x);
    }


  public Comparable lookup(Comparable x){   // Sucht x im SuchBaum
                                            // falls gefunden:
    return (Comparable)find(x).inhalt;      // liefert Comparable-Object
    }                                       // null sonst


  public boolean insert(Comparable x) {     // fuegt x in SuchBaum ein
                                            // liefert true, falls erfolgreich
                                            // false sonst

    SuchBaum s = find(x);                   // SuchBaum mit x in der Wurzel
                                            // oder leer

    if (s.empty()) {                        // wenn leer, d.h. x noch nicht
                                            // im SuchBaum enthalten:
        s.inhalt = x;                       // setzte Inhalt auf x
        s.links  = new SuchBaum();          // neuer leerer SuchBaum links
        s.rechts = new SuchBaum();          // neuer leerer SuchBaum rechts
        return true;
    }
    else return false;
  }
```

```
  public boolean delete(Comparable x) {      // loescht x aus SuchBaum,
                                             // liefert true, falls erfolgreich
                                             // false sonst

    SuchBaum s = find(x);                    // SuchBaum mit x in der Wurzel
                                             // oder leer
    SuchBaum ersatz;                         // Ersatzknoten

    if (s.empty()) return false;             // wenn x nicht gefunden: false
    else {                                   // wenn x gefunden
      if      (s.left().empty())
        ersatz = (SuchBaum)s.right();
      else if (s.right().empty())
        ersatz = (SuchBaum)s.left();
      else {                                 // Knoten mit x hat zwei Soehne
        ersatz =                             // ermittele das Maximum
          ((SuchBaum)s.left()).findMax();    // im linken Teilbaum
        s.inhalt = ersatz.inhalt;            // ersetze Inhalt
        s = ersatz;                          // zu ersetzen
        ersatz = (SuchBaum)ersatz.left();    // Ersatz: linker
      }
      s.inhalt = ersatz.inhalt;              // ersetze die Komponenten
      s.links  = ersatz.links;
      s.rechts = ersatz.rechts;
      return true;
    }
  }

  private SuchBaum findMax() {               // sucht im nichtleeren SuchBaum
                                             // liefert den SuchBaum
                                             // mit dem Maximum in der Wurzel
    SuchBaum hilf = this;

    while (!hilf.right().empty())
      hilf = (SuchBaum)hilf.right();
    return hilf;                             // der rechteste Nachfahre von this
  }
}
```

```
/****************************  SuchBaumTest.java  ****************************/
import AlgoTools.IO;

/** Testet den SuchBaum mit CharComparable-Objekten.
 */
public class SuchBaumTest {

    public static void main(String[] argv) {
        SuchBaum s = new SuchBaum();

        char[] eingabe = IO.readChars("Bitte Zeichen fuer insert: ");

        for (int i=0; i<eingabe.length; i++)   // Elemente in SuchBaum einfuegen
            if (s.insert(new CharComparable(eingabe[i])))
                IO.println(eingabe[i] + " eingefuegt");
            else
                IO.println(eingabe[i] + " konnte nicht eingefuegt werden");

        IO.print("Inorder: ");                 // Inorder-Traversierung
        Traverse.inorder(s); IO.println();

        eingabe = IO.readChars("Bitte Zeichen fuer lookup: ");

        for (int i=0; i<eingabe.length; i++) { // Elemente im SuchBaum suchen
            Comparable c = s.lookup(new CharComparable(eingabe[i]));
            if(c == null)
                IO.println(eingabe[i] + " konnte nicht gefunden werden");
            else
                IO.println(c + " gefunden");
        }
        eingabe = IO.readChars("Bitte Zeichen fuer delete: ");

        for (int i=0; i<eingabe.length; i++) { // Elemente im SuchBaum loeschen
            if (s.delete(new CharComparable(eingabe[i])))
                IO.println(eingabe[i] + " geloescht");
            else
                IO.println(eingabe[i] + " konnte nicht geloescht werden");

            IO.print("Inorder: ");             // Inorder-Traversierung
            Traverse.inorder(s); IO.println();
    }
  }
}
```

Abhängigkeiten

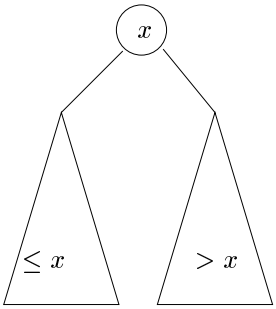
Folgende Grafik verdeutlicht die Abhängigkeiten der zum Suchen von Characters verwendeten Module:



Multimenge

Zur Verwaltung einer Multimenge (Elemente sind ggf. mehrfach vorhanden) kann ein Suchbaum wie folgt verwendet werden:

1. Möglichkeit: Elemente doppelt halten



2. Möglichkeit: Zähler im Knoten mitführen

Beim Einfügen: Zähler hochzählen, sofern Element schon vorhanden, sonst einfügen.

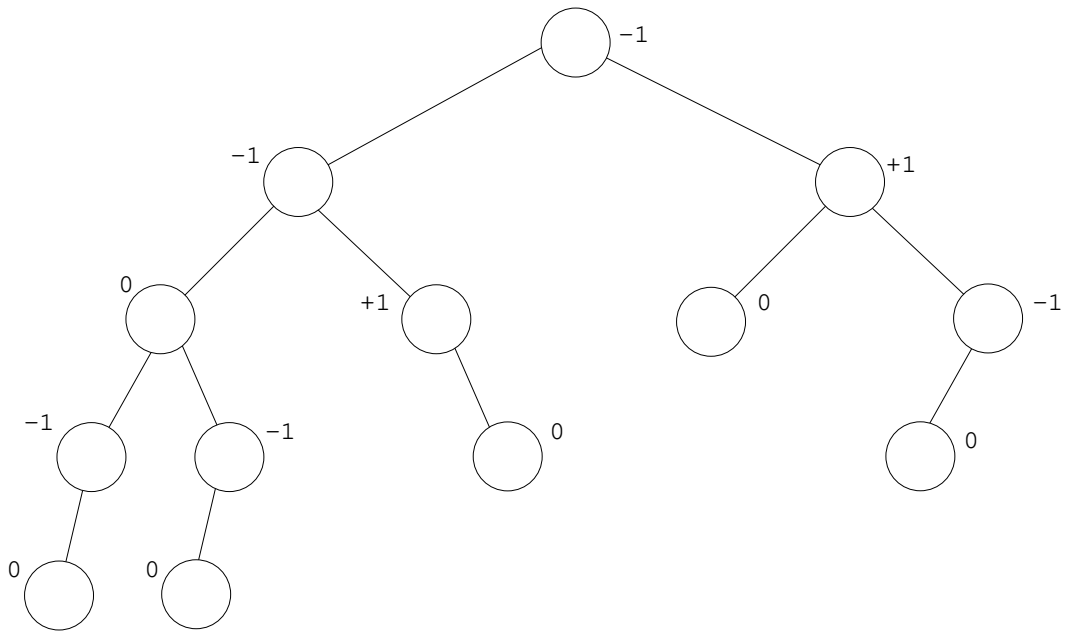
Beim Löschen: Zähler herunterzählen, sofern mehrfach da, sonst entfernen.

9.7 AVL-Baum

(benannt nach Adelson-Velskii und Landis, 1962)

Def.: Ein Knoten eines binären Baumes heißt *ausgeglichen* oder *balanciert*, wenn sich die Höhen seiner beiden Söhne um höchstens 1 unterscheiden.

Def.: Ein binärer Suchbaum, in dem jeder Knoten ausgeglichen ist, heißt *AVL-Baum*.



Sei $bal(x)$ = Höhe des rechten Teilbaums von x minus Höhe des linken Teilbaums von x.

Aufgrund der Ausgeglichenheit ist die Suche in einem AVL-Baum auch im ungünstigsten Fall von der Ordnung $O(\log n)$. Um das zu gewährleisten, muss nach jedem Einfügen oder Löschen die Ausgeglichenheit überprüft werden. Hierzu werden längs des Weges vom eingefügten bzw. gelöschten Element bis zur Wurzel die Balance-Werte abgefragt und durch so genannte *Rotationen* repariert.

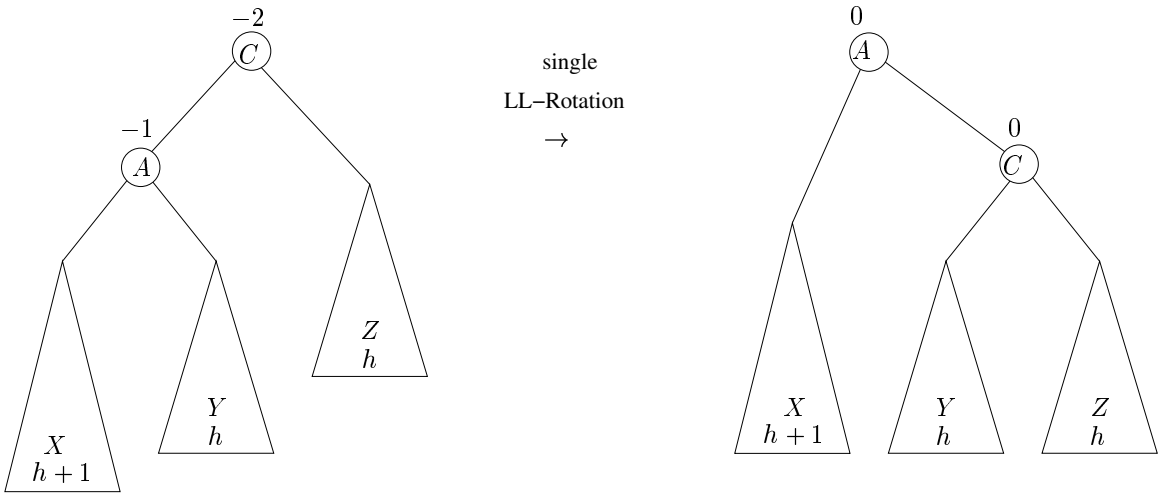
Während das Einfügen eines einzelnen Schlüssels *höchstens eine* Rotation erfordert, kann das Löschen eine Rotation für *jeden* Knoten entlang des Weges zur Wurzel verursachen.

Rotationen für AVL-Baum bei linksseitigem Übergewicht

Single LL-Rotation

Bei Einfügen in Teilbaum X: Höhe des gesamten Baums vorher und nachher gleich.

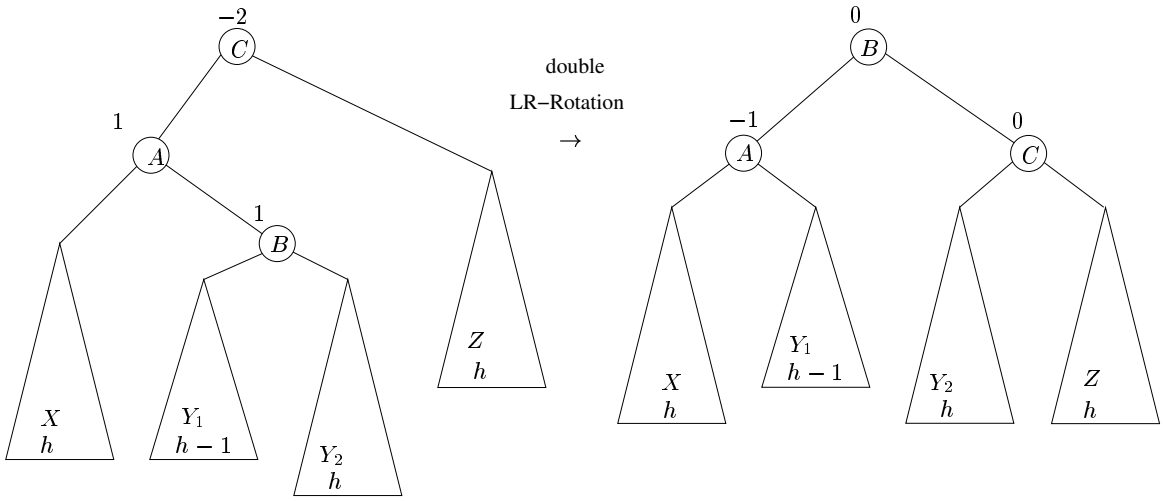
Bei Löschen im Teilbaum Z: Höhe des gesamten Baums vorher und nachher gleich oder nacher um eins kleiner.



Double LR-Rotation

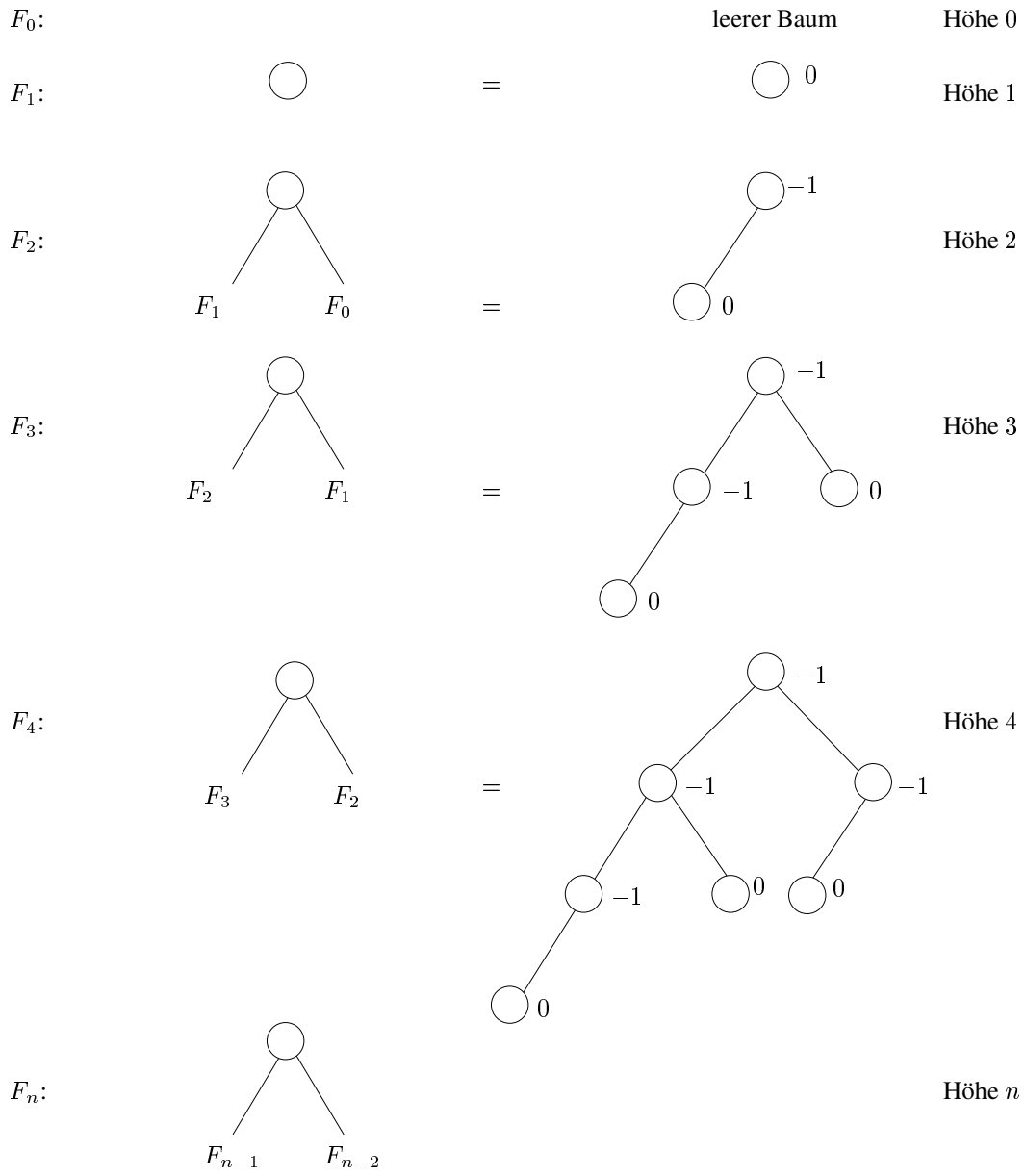
Bei Einfügen in Teilbaum Y_1 oder Y_2: Höhe des gesamten Baums vorher und nachher gleich.

Bei Löschen im Teilbaum Z: Höhe des gesamten Baums nachher um eins kleiner.



Bei rechtsseitigem Übergewicht werden die symmetrischen Rotationen “single RR” und “double RL” angewendet.

Minimal ausgeglichene AVL-Bäume sind *Fibonacci*-Bäume



Satz: Die Höhe eines AVL-Baumes mit n Knoten ist $\leq 1.45 \cdot \log n$, d.h. höchstens 45 % größer als erforderlich.

Bem.: Das Löschen eines Knotens in einem Fibonacci-AVL-Baum führt zu einer Reduktion der Höhe des Baumes. Das Löschen des Knotens mit dem größten Schlüssel erfordert die größtmögliche Zahl von Rotationen: Im Fibonacci-Baum F_n werden dabei $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ LL-Rotationen durchgeführt.

```
/****************************  AVLBaum.java  *********************************/

import AlgoTools.IO;

/** Ein AVLBaum ist ein SuchBaum, bei dem alle Knoten ausgeglichen
 *  sind. Das heisst, fuer jeden seiner Knoten unterscheiden sich
 *  die Hoehen seiner beiden Teilbaeume maximal um eins.
 */



public class AVLBaum extends SuchBaum implements Menge {

    private int balance;                 // Balance

    public AVLBaum() {                   // erzeugt leeren AVLBaum

        balance = 0;
    }



    private static class Status {        // Innere Klasse zur Uebergabe eines
                                         // Status in der Rekursion
        boolean unbal;                   // unbal ist true, wenn beim Einfue-
                                         // gen ein Sohn groesser geworden ist
        Status () {                      // Konstruktor der inneren Klasse
            unbal = false;               // Element noch nicht eingefuegt =>
        }                                // noch keine Unausgeglichenheit
    }



    public String toString() {           // fuer Ausgabe: Inhalt(Balance)

        return new String(inhalt + "(" + balance + ")");
    }



    public boolean insert(Comparable x) {// fuegt x in den AVLBaum ein: true,
                                         // wenn erfolgreich, sonst false.
                                         // Kapselt die Funktion insertAVL
        return insertAVL(x, new Status());
    }
```

```
private boolean insertAVL(Comparable x,Status s){//Tatsaechliche Methode zum
                                                  // Einfuegen (rekursiv)
    boolean eingefuegt;

    if(empty()) {                     // Blatt: Hier kann eingefuegt werden
        inhalt = x;                   // Inhalt setzen
        links  = new AVLBaum();       // Neuer leerer AVLBaum links
        rechts = new AVLBaum();       // Neuer leerer AVLBaum rechts
        s.unbal = true;               // Dieser Teilbaum wurde groesser
        return true;                  // Einfuegen erfolgreich und
    }                                 // dieser Teilbaum groesser

    else if (((Comparable)value()).compareTo(x) == 0)   // Element schon
                                                        // im AVLBaum
        return false;

    else if (((Comparable)value()).compareTo(x) > 0){   // Element x kleiner
        eingefuegt = ((AVLBaum)left()).insertAVL(x,s);  // linker Teilbaum

        if(s.unbal) {                 // Linker Teilbaum wurde groesser
            if (balance == 1) {       // Alte Unausgeglichenheit ausgegl.
                balance = 0;          // => neue Balance = 0
                s.unbal = false;      // Unausgeglichenheit ausgeglichen
                return true;
            }
            else if (balance == 0) { // Hier noch kein Rotieren noetig
                balance = -1;         // Balance wird angeglichen
                return true;
            }
            else {                    // Rotieren notwendig

                if (((AVLBaum)links).balance == -1)
                    rotateLL();
                else
                    rotateLR();
                s.unbal = false;      // Unausgeglichenheit ausgeglichen
                return true;          // => Rueckgabewert
            }                         // angleichen
        }
```

```
        } else {                          // Element ist groesser =>
            eingefuegt = ((AVLBaum)right()).insertAVL(x,s);// rechter Teilbaum

            if(s.unbal) {                 // Rechter Teilbaum wurde groesser
                if (balance == -1) {      // Alte Unausgeglichenheit ausgegl.
                    balance = 0;          // => neue Balance = 0
                    s.unbal = false;      // Unausgeglichenheit ausgeglichen
                    return true;
                }
                else if (balance == 0) { // Hier noch kein Rotieren noetig
                    balance = 1;          // Balance wird angeglichen
                    return true;
                }

                else {                    // Rotieren notwendig

                    if (((AVLBaum)rechts).balance == 1)
                        rotateRR();
                    else
                        rotateRL();
                    s.unbal = false;      // Unausgeglichenheit ausgeglichen
                    return true;          // => Rueckgabewert
                }                         // angleichen
            }
        }
        return eingefuegt;                // Keine Rotation => Ergebnis zurueck
    }
```

```
public void rotateLL() {

        IO.println("LL-Rotation im Teilbaum mit Wurzel "+ inhalt);

        AVLBaum a1 = (AVLBaum)links;     // Merke linken
        AVLBaum a2 = (AVLBaum)rechts;    // und rechten Teilbaum
                                         // Idee: Inhalt von a1 in die Wurzel
        links = a1.links;                // Setze neuen linken Sohn
        rechts = a1;                     // Setze neuen rechten Sohn
        a1.links = a1.rechts;            // Setze dessen linken
        a1.rechts = a2;                  // und rechten Sohn

        Object tmp = a1.inhalt;          // Inhalt von rechts (==a1)
        a1.inhalt = inhalt;              // wird mit Wurzel
        inhalt = tmp;                    // getauscht

        ((AVLBaum)rechts).balance = 0;   // rechter Teilbaum balanciert
        balance = 0;                     // Wurzel balanciert
    }



    public void rotateLR() {

        IO.println("LR-Rotation im Teilbaum mit Wurzel "+ inhalt);

        AVLBaum a1 = (AVLBaum)links;     // Merke linken
        AVLBaum a2 = (AVLBaum)a1.rechts; // und dessen rechten Teilbaum
                                         // Idee: Inhalt von a2 in die Wurzel
        a1.rechts = a2.links;            // Setze Soehne von a2
        a2.links = a2.rechts;
        a2.rechts = rechts;
        rechts = a2;                     // a2 wird neuer rechter Sohn

        Object tmp = inhalt;             // Inhalt von rechts (==a2)
        inhalt = rechts.inhalt;          // wird mit Wurzel
        rechts.inhalt = tmp;             // getauscht

        if (a2.balance == 1)             // Neue Bal. fuer linken Sohn
            ((AVLBaum)links).balance = -1;
        else
            ((AVLBaum)links).balance = 0;

        if (a2.balance == -1)            // Neue Bal. fuer rechten Sohn
            ((AVLBaum)rechts).balance = 1;
        else
            ((AVLBaum)rechts).balance = 0;
        balance = 0;                     // Wurzel balanciert
    }
```

```
public void rotateRR() {

    IO.println("RR-Rotation im Teilbaum mit Wurzel "+ inhalt);

    AVLBaum a1 = (AVLBaum)rechts;    // Merke rechten
    AVLBaum a2 = (AVLBaum)links;     // und linken Teilbaum
                                     // Idee: Inhalt von a1 in die Wurzel
    rechts = a1.rechts;              // Setze neuen rechten Sohn
    links = a1;                      // Setze neuen linken Sohn
    a1.rechts = a1.links;            // Setze dessen rechten
    a1.links  = a2;                  // und linken Sohn

    Object tmp = a1.inhalt;          // Inhalt von links (==a1)
    a1.inhalt = inhalt;              // wird mit Wurzel
    inhalt = tmp;                    // getauscht

    ((AVLBaum)links).balance = 0;    // linker Teilbaum balanciert
    balance = 0;                     // Wurzel balanciert
}


public void rotateRL() {

    IO.println("RL-Rotation im Teilbaum mit Wurzel "+ inhalt);

    AVLBaum a1 = (AVLBaum)rechts;    // Merke rechten Sohn
    AVLBaum a2 = (AVLBaum)a1.links;  // und dessen linken Teilbaum
                                     // Idee: Inhalt von a2 in die Wurzel
    a1.links = a2.rechts;
    a2.rechts = a2.links;            // Setze Soehne von a2
    a2.links = links;
    links = a2;                      // a2 wird neuer linker Sohn

    Object tmp = inhalt;             // Inhalt von links (==a2)
    inhalt = links.inhalt;           // wird mit Wurzel
    links.inhalt = tmp;              // getauscht

    if (a2.balance == -1)            // Neue Bal. fuer rechten Sohn
        ((AVLBaum)rechts).balance = 1;
    else
        ((AVLBaum)rechts).balance = 0;

    if (a2.balance == 1)             // Neue Bal. fuer linken Sohn
        ((AVLBaum)links).balance = -1;
    else
        ((AVLBaum)links).balance = 0;
    balance = 0;                     // Wurzel balanciert
}
```

```
public boolean delete(Comparable x) {// loescht x im AVLBaum: true,
                                     // wenn erfolgreich, sonst false.
                                     // Kapselt die Funktion deleteAVL
    return deleteAVL(x, new Status());
}



private boolean deleteAVL(Comparable x, Status s) { // Tatsaechliche Methode
                                                    // zum Loeschen (rekursiv)
                                                    // true, wenn erfolgreich
    boolean geloescht;               // true, wenn geloescht wurde

    if(empty()) {                    // Blatt: Element nicht gefunden
        return false;                // => Einfuegen erfolglos
    }

    else if (((Comparable)value()).compareTo(x) < 0){// Element x groesser
                                                     // Suche rechts weiter
        geloescht = ((AVLBaum)rechts).deleteAVL(x,s);
        if (s.unbal == true) balance2(s);            // Gleiche ggf. aus
        return geloescht;
    }
    else if (((Comparable)value()).compareTo(x) > 0){// Element x kleiner
                                                     // Suche links weiter
        geloescht = ((AVLBaum)links).deleteAVL(x,s);
        if (s.unbal == true) balance1(s);            // Gleiche ggf. aus
        return geloescht;
    }
    else {                           // Element gefunden
        if (rechts.empty()) {        // Kein rechter Sohn
            inhalt = links.inhalt;   // ersetze Knoten durch linken Sohn
            links = links.links;     // Kein linker Sohn mehr
            balance = 0;             // Knoten ist Blatt
            s.unbal = true;          // Hoehe hat sich geaendert
        } else if (links.empty()) {  // Kein linker Sohn
            inhalt = rechts.inhalt;  // ersetze Knoten durch rechten Sohn
            rechts = rechts.rechts;  // Kein rechter Sohn mehr
            balance = 0;             // Knoten ist Blatt
            s.unbal = true;          // Hoehe hat sich geaendert
        } else {                     // Beide Soehne vorhanden
            inhalt = ((AVLBaum)links).del(s);   // Rufe del() auf
            if (s.unbal) {           // Gleiche Unbalance aus
                balance1(s);
            }
        }
        return true;                 // Loeschen erfolgreich
    }
```

```
}



private void balance1(Status s) {    // Unbalance, weil linker Ast kuerzer
    if (balance == -1)
        balance = 0;                 // Balance geaendert, nicht ausgegl.
    else if (balance == 0) {
        balance = 1;                 // Ausgeglichen
        s.unbal = false;
    } else {                         // Ausgleichen (Rotation) notwendig
        int b = ((AVLBaum)rechts).balance; //Merke Balance des rechten Sohns
        if (b >= 0) {
            rotateRR();
            if (b == 0) {            // Gleiche neue Balancen an
                balance = -1;
                ((AVLBaum)links).balance = 1;
                s.unbal = false;
            }
        } else
            rotateRL();
    }
}



private void balance2(Status s) {    // Unbalance, weil recht. Ast kuerzer
    if (balance == 1)
        balance = 0;                 // Balance geaendert, nicht ausgegl.
    else if (balance == 0) {
        balance = -1;                // Ausgeglichen
        s.unbal = false;
    } else {                         // Ausgleichen (Rotation) notwendig
        int b = ((AVLBaum)links).balance; // Merke Balance des linken Sohns
        if (b <= 0) {
            rotateLL();
            if (b == 0) {            // Gleiche neue Balancen an
                balance = 1;
                ((AVLBaum)rechts).balance = -1;
                s.unbal = false;
            }
        } else
            rotateLR();
    }
}
```

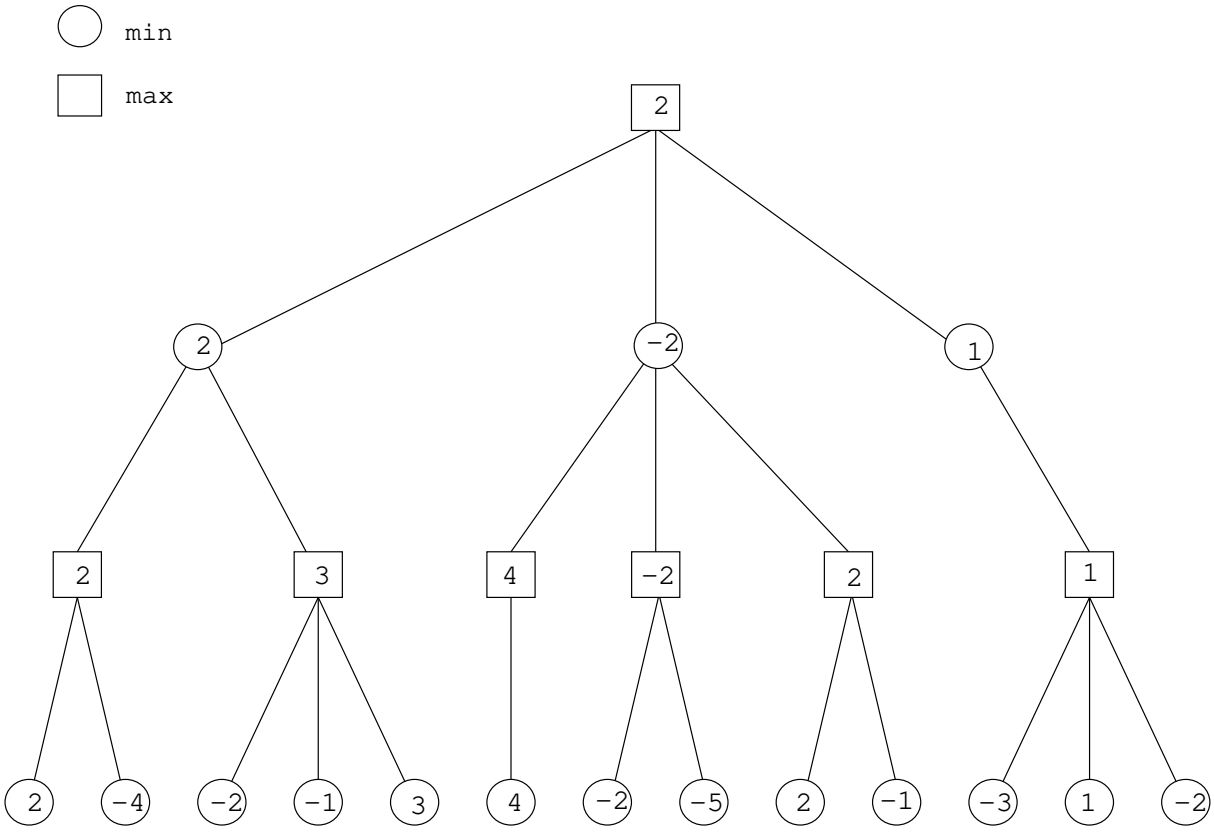
```
    private Object del(Status s) {       // Sucht Ersatz fuer gel. Objekt
        Object ersatz;                   // Das Ersatz-Objekt
        if (!rechts.empty()) {           // Suche groessten Sohn im Teilbaum
            ersatz = ((AVLBaum)rechts).del(s);
            if (s.unbal)                 // Gleicht ggf. Unbalance aus
                balance2(s);
        } else {                         // Tausche mit geloeschtem Knoten
            ersatz = inhalt;             // Merke Ersatz und
            inhalt = links.inhalt;       // ersetze Knoten durch linken Sohn.
            links = links.links;         // Kein linker Sohn mehr
            balance = 0;                 // Knoten ist Blatt
            s.unbal = true;              // Teilbaum wurde kuerzer
        }
        return ersatz;                   // Gib Ersatz-Objekt zurueck
    }

}
```

```
/****************************  AVLBaumTest.java  ****************************/

import AlgoTools.IO;

/** Klasse zum Testen des AVLBaums: Einfuegen und Loeschen von Character      */

public class AVLBaumTest {

  public static void main(String[] argv) {

    AVLBaum b = new AVLBaum();
    char k = IO.readChar("Char in AVL-Baum einfuegen (Loeschen: \\n): ");
    while (k != '\n') {
      if (b.insert(new CharComparable(k))) IO.println(k + " eingefuegt");
      else                                 IO.println(k + " nicht eingefuegt");
      IO.println("AVL-Baum mit Balancen:");
      printAVLBaum(b, 0);
      k = IO.readChar("Char in AVL-Baum einfuegen (Loeschen: \\n): ");
    }
    IO.println();
    k = IO.readChar("Char im AVL-Baum loeschen (Abbruch: \\n): ");

    while (k != '\n') {
      if (b.delete(new CharComparable(k))) IO.println(k + " geloescht");
      else                             IO.println(k + " nicht geloescht");
      IO.println("AVL-Baum mit Balancen:");
      printAVLBaum(b, 0);
      k = IO.readChar("Char im AVL-Baum loeschen (Abbruch: \\n): ");
    }

  }

  /** Der AVL-Baum wird liegend mit Werten und Balancen ausgegeben.  */
  public static void printAVLBaum(Baum b, int tiefe) {
    if (! b.empty()) {                     // Wenn Baum nicht leer:
      printAVLBaum(b.right(), tiefe+1);    // rechten Teilbaum ausgeben
      for (int i=0; i<tiefe; i++)          // entsprechend der Rekursions-
        IO.print("    ");                  // tiefe einruecken
      IO.println((AVLBaum)b);              // Wurzel und Balance ausgeben
      printAVLBaum(b.left(), tiefe+1);     // linken Teilbaum ausgeben
    }
  }
}
```

9.8 Spielbaum

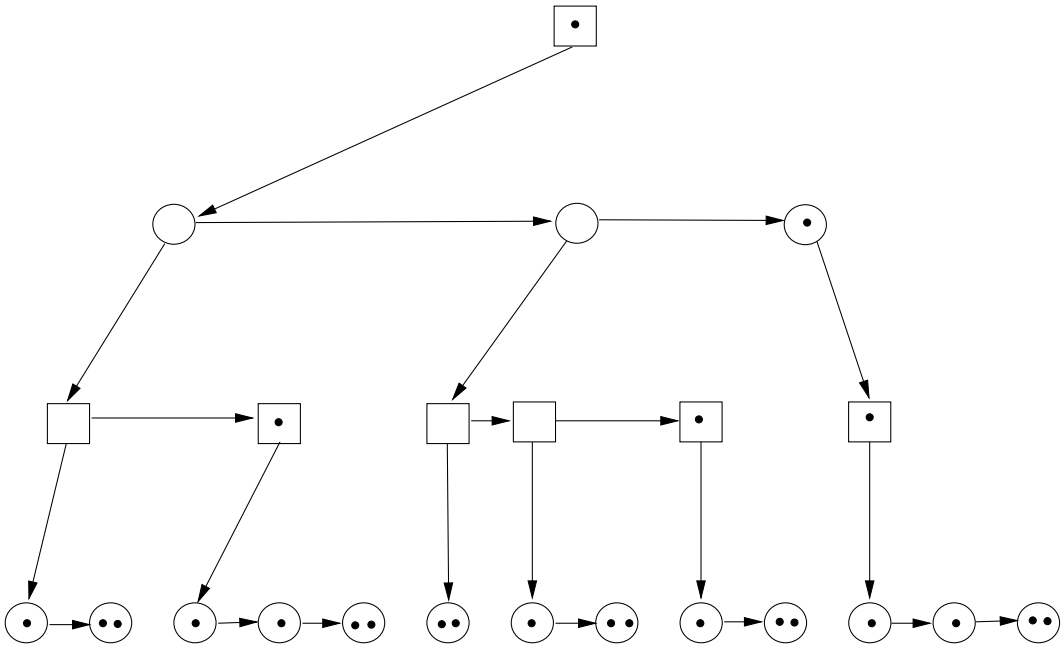
Def.: Ein Spielbaum ist ein Baum mit zwei Typen von Knoten: Minimum-Knoten und Maximum-Knoten.
Die Knoten repräsentieren Spielstellungen.
Der Wert eines Blattes wird bestimmt durch eine statische Stellungsbewertung.
Der Wert eines Minimum-Knotens ist das Minimum der Werte seiner Söhne.
Der Wert eines Maximum-Knotens ist das Maximum der Werte seiner Söhne.
Obacht: Bei Höhe h und Verzweigungsgrad d gibt es d^{h-1} Blätter.
Z.B. 8 Halbzüge mit je 20 Alternativen $\Rightarrow$ $25.600.000.000$ Blätter.

Beispiel für einen Spielbaum



Implementation eines nicht-binären Baums

Jeder Knoten hat einen Verweis auf den ältesten Sohn und den nächstjüngeren Bruder.



```
/***************************  SpielBaum.java  *********************************/

/** Klasse SpielBaum mit der geschachtelten Klasse Stellung
 *  und den Datenfeldern typ, stellung, first, next
 *  und der Methode minmax.
 */

public class SpielBaum {

  class Stellung {}          // Platzhalter fuer Definition der Klasse Stellung
  Stellung stellung;         // Datenfeld Spielstellung
  boolean  maxtyp;           // true, falls Max-Knoten; false, falls Min-Knoten
  SpielBaum first;           // Verweis auf aeltesten Sohn
  SpielBaum next;            // Verweis auf naechstjuengeren Bruder

  public int statisch(){     // Platzhalter fuer Algorithmus zur Bewertung
    return 0;                // des Knotens aufgrund des Datenfelds stellung
  }

  public int minmax () {                          // wertet Spielbaum aus
    SpielBaum bruder;                             // Hilfsverweis
    int bruderwert, best;                         // Hilfsvariable

    if (first == null)                            // falls Blatt,
        return statisch();                        // werte statisch aus
    else {                                        // falls kein Blatt,
        if (maxtyp) best = Integer.MIN_VALUE;     // je nach Knotentyp
               else best = Integer.MAX_VALUE;     // setze initialen Wert fest

        bruder = first;                           // beginne bei aeltestem Sohn,
        while (bruder != null) {                  // solange es Soehne gibt,
          bruderwert = bruder.minmax();           // bestimme Wert des Knotens
          if ((( maxtyp) && (bruderwert>best))||  // falls Verbesserung
              ((!maxtyp) && (bruderwert<best)))   // beobachtet wurde,
              best = bruderwert;                  // merke Verbesserung
          bruder = bruder.next;                   // gehe zum naechsten Bruder
        }
    }
    return best;                                  // liefere Wert zurueck
  }
}
```

Kapitel 10

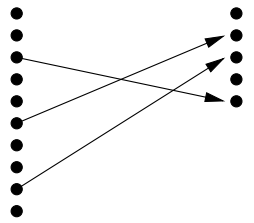
Hashing

Zum Abspeichern und Wiederfinden von Elementen wäre folgende Funktion hilfreich:

```
f: Element -> int
```

Dann könnte Element x bei Adresse $f(x)$ gespeichert werden.

Problem: Anzahl der möglichen Elemente $\gg$ Anzahl der Adressen



mögliche Elemente N Adressen

Gegeben Adressen von 0 bis $N-1$.

Sei `x` ein beliebiges Objekt. Dann ist

```
String s = x.toString();
```

seine Stringrepräsentation.

Sei $x = x_{n-1}x_{n-2}\ldots x_1x_0$ ein String, dann ist

$$f(x) = \left(\sum_{i=0}^{n-1} x_i\right) \text{ MOD } N$$

eine *Hashfunktion*.

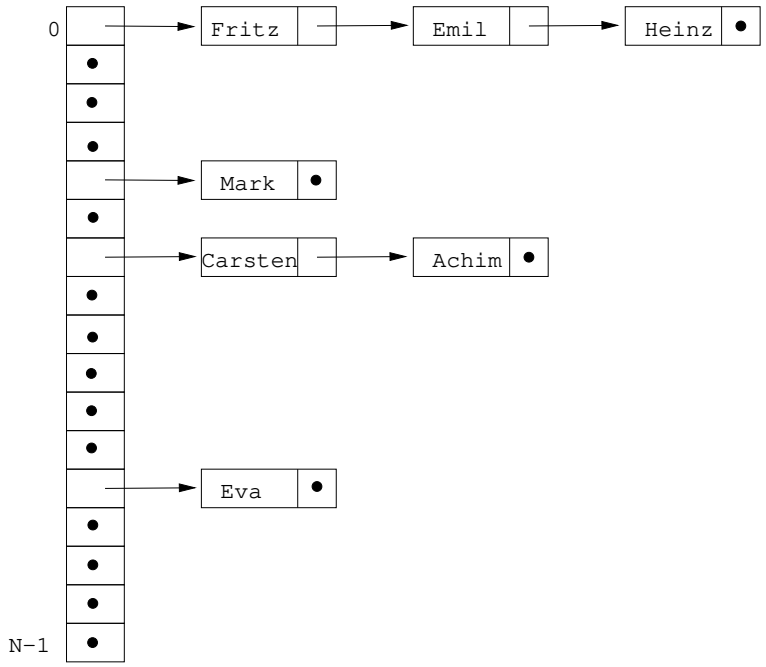
Gilt: $f(x) = f(y)$, so liegt eine *Kollision* vor, die bei *offenem* und *geschlossenem* Hashing unterschiedlich behandelt wird.

10.1 Offenes Hashing

```
private Liste[] b; // Array von Buckets
                   // Jedes Bucket enthaelt Liste von Comparables
```

Alle Elemente x mit $f(x) = i$ befinden sich in der Liste $\mathtt{b}[i]$. Bei N Buckets und n Elementen enthält jede Liste im Mittel $\frac{n}{N}$ Elemente.

Implementation des offenen Hashings



10.2 Geschlossenes Hashing

```
private Comparable[] inhalt;          // Array von Comparables
private byte[] zustand;               // Array von Zustaenden
                                      // LEER, BELEGT und GELOESCHT
```

Falls $y = f(x)$ schon belegt ist, so suche für x einen Alternativplatz.

$y+1, y+2, y+3, y+4, \ldots$	*lineares Sondieren*
$y+1, y+4, y+9, y+16, \ldots$	*quadratisches Sondieren*
$y + f_2(x)$	*Double Hashing* (Schrittweite wird durch 2. Hashfunktion bestimmt)

Beim linearen und quadratischen Sondieren müssen höchstens $N-1$ Sondierschritte durchgeführt werden. Beim quadratischen Sondieren werden ggf. nicht alle Buckets besucht, aber mindestens $\frac{N}{2}$.

Implementation des geschlossenen Hashings

0	B	Fritz
	B	Emil
	L	
	L	
	B	Mark
	L	
	B	Carsten
	G	
	L	
	B	Heinz
	G	
	L	
	B	Eva
	L	
	L	
	B	Achim
N-1	L	

L = LEER
B = BELEGT
G = GELOESCHT

Beispiel:

Die beiden Abbildungen ergeben sich durch sukzessives Einfügen der Worte

`Fritz`, `Mark`, `Emil`, `Carsten`, `Ulf`, `Heinz`, `Lutz`, `Eva`, `Achim`

und anschließendes Löschen von

`Ulf`, `Lutz`

für $N = 17$.

Perfekte Hashfunktion

Gesucht wird eine Hashfunktion f, die auf den Elementen keine Kollision verursacht, z.B.:

$$\text{gesucht: } f \quad : \quad \{\text{braun}, \quad \text{rot}, \quad \text{blau}, \quad \text{violett}, \quad \text{türkis}\} \quad \rightarrow \quad \mathbb{N}$$

$$\begin{array}{rcccccc} \text{Länge}(w) & = & 5 & 3 & 4 & 7 & 6 \\ \text{Länge}(w) - 3 & = & 2 & 0 & 1 & 4 & 3 \end{array}$$

$\Rightarrow f(w) = \text{Länge}(w) - 3 \in [0..4]$ ist perfekte Hashfunktion.

```
/****************************  OfHashing.java  ******************************/

/** Implementation des Interface Menge durch Array von Listen                */

public class OfHashing implements Menge {

  private Liste[] b ;                        // Array fuer Listen

  public OfHashing(int N) {                  // Konstruktor fuer Hashtabelle
    b  = new Liste[N];                       // besorge Platz fuer N Listen
    for (int i=0; i<N; i++)                  // konstruiere pro Index
        b[i]=new VerweisListe();             // eine leere Liste
  }

  private int hash(Comparable x) {           // berechne Hash-Wert fuer x
    int i, summe = 0;                        // Hilfsvariablen
    String s = x.toString();                 // berechne Stringdarstellung von x
    for (i=0; i<s.length(); i++)             // durchlaufe den String
        summe += s.charAt(i);                // und addiere alle Zeichen
    return summe % b.length;                 // liefere summe mod Array-Laenge
  }

  public String toString() {                 // liefert den Aufbau der Tabelle
    String s = new String();                 // als String zurueck
    for (int i=0; i< b.length; i++){         // durchlaufe Array
      s += i + " :";                         // notiere Index
      b[i].reset();                          // gehe an Anfang der Liste
      while (!b[i].endpos()) {               // solange noch nicht am Ende
         s += " " + b[i].elem();             // notiere aktuelles Objekt
         b[i].advance();                     // schreite in Liste voran
      }
      s += "\n";                             // notiere Zeilenvorschub
    } return s;                              // liefere Stringdarstellung
  }

  private boolean find(Liste l, Comparable x) { // sucht x in Liste
    l.reset();                               // gehe an den Anfang der Liste
    while (!l.endpos() &&                    // solange noch nicht am Ende
                                             // und Objekt noch nicht gefunden
           ((Comparable)l.elem()).compareTo(x) != 0)
      l.advance();                           // schreite voran
    return !l.endpos();                      // liefert true, falls gefunden
  }                                          // sonst false

  // Unter Verwendung der Hashfunktion hash und der Hilfsmethode find
  // werden die oeffentlichen Methoden implementiert

  public Comparable lookup(Comparable x) {   // versucht x nachzuschlagen
    int index = hash(x);                     // berechne Hash-Wert
    if (find(b[index],x))                    // falls in Liste gefunden,
        return (Comparable)b[index].elem(); // liefere Verweis auf Objekt
    else return null;                        // liefere Fehlanzeige
  }
```

```
  public boolean insert(Comparable x) {      // versucht x einzufuegen
    int index = hash(x);                     // berechne Hash-Wert
    if (!find(b[index],x)){                  // falls nicht in Liste gefunden,
        b[index].insert(x);                  // fuege in Liste ein
        return true;                         // melde Erfolg
    } else return false;                     // melde Misserfolg
  }


  public boolean delete(Comparable x) {      // versucht x zu loeschen
    int index = hash(x);                     // berechne Hash-Wert
    if (find(b[index],x)){                   // falls in Liste gefunden,
        b[index].delete();                   // entferne aus Liste
        return true;                         // melde Erfolg
    } else return false;                     // melde Misserfolg
  }
}


/****************************  GeHashing.java  ******************************/

/** Implementation des Interface Menge
 *  durch ein geschlossenes Hashing mit einem Array von Objekten.
 */

public class GeHashing implements Menge {

  private final static byte LEER      = 0;  // noch nie belegt, jetzt frei
  private final static byte BELEGT    = 1;  // zur Zeit belegt
  private final static byte GELOESCHT = 2;  // war schon mal belegt, jetzt frei

  private Comparable[] inhalt;               // Array fuer Elemente
  private byte[]       zustand;              // Array fuer Zustaende

  public GeHashing(int N) {                  // Konstruktor fuer Hashtabelle
    inhalt  = new Comparable[N];             // besorge Platz fuer N Objekte
    zustand = new byte[N];                   // besorge Platz fuer N Zustaende
    for (int i=0; i<N; i++)                  // setze alle Zustaende
        zustand[i]=LEER;                     // auf LEER
  }

  private int hash(Comparable x) {           // berechne Hash-Wert fuer x
    int i, summe = 0;                        // Hilfsvariablen
    String s = x.toString();                 // berechne Stringdarstellung von x
    for (i=0; i<s.length(); i++)             // durchlaufe den String
        summe += s.charAt(i);                // und addiere alle Zeichen
    return summe % inhalt.length;            // liefere summe mod Tabellenlaenge
  }
```

```
public String toString() {                  // liefert den Aufbau der Tabelle
  String s = new String();                  // als String zurueck
  for (int i=0; i< inhalt.length; i++){     // durchlaufe Tabelle
    s += i;                                 // notiere Index
    switch(zustand[i]) {                    // je nach eingetragenem Zustand
      case LEER:      s+="  L  "; break;    // notiere L
      case BELEGT:    s+="  B  "; break;    // notiere B
      case GELOESCHT: s+="  G  "; break;    // notiere G
    }
    if (zustand[i]==BELEGT) s+=inhalt[i]; // notiere Objektdarstellung
    s += '\n';                              // notiere Zeilenvorschub
  }
  return s;                                 // liefere Stringdarstellung
}

// Unter Verwendung der Hashfunktion hash wird eine Hilfsmethode
// implementiert, welche das Objekt in der Tabelle sucht und durch
// - einen positiven Rueckgabewert den Index angibt, wo es gefunden wurde
// - einen negativen Rueckgabewert den bitweise negierten Index angibt,
//   wo es eingefuegt werden koennte (d.h., es wurde nicht gefunden).
// Implementiert ist ein quadratisches Sondieren: Die Sondierschrittweite d
// wird mit eins initialisiert und in jedem Sondierschritt um zwei erhoeht.

private int find(Comparable x) {            // sucht x in der Hashtabelle
                                            // liefert Position, falls gefunden
                                            // oder negierte Pos. zum Einfuegen
  int versuche          = 0;                // Zahl der Sondierungen
  int d                 = 1;                // Sondierschrittweite
  boolean loch_gefunden = false;            // true, falls Loch gefunden
  int lochindex         = 0;                // Vorschlag zum spaeteren Einfuegen
  int index             = hash(x);          // berechne Hash-Wert

  while (!(((zustand[index] == BELEGT)      // Abbruch, falls
   && (inhalt[index].compareTo(x) == 0))    // Element gefunden
   || (zustand[index] == LEER)              // oder leeres Feld gefunden
   || (versuche == inhalt.length))) {       // oder Zahl der Versuche zu gross

                                            // nur wegen spaeterem insert:
      if ((!loch_gefunden) &&               // falls noch kein Loch gefunden
          (zustand[index] == GELOESCHT)){   // und GELOESCHT vorliegt,
          loch_gefunden = true;             // merke, dass Loch gefunden
          lochindex     = index;            // und seine Position
      }
     index = (index + d) % inhalt.length;   // mache einen Sondierschritt
     d    += 2;                             // erhoehe Schrittweite
     versuche++;                            // erhoehe Zahl der Versuche
  }
  if ((zustand[index]==BELEGT) &&           // falls belegtes Feld
      (inhalt[index].compareTo(x) == 0))    // und x gefunden
      return index;                         // liefere Position zurueck
  if (loch_gefunden) return ~lochindex;     // liefere Loch (bitweise negiert)
                 else return ~index;        // sonst letzte Einfuegeposition
}                                           // als negierte Zahl zurueck
```

```
  // Unter Verwendung der Hilfsmethode find
  // werden die oeffentlichen Methoden lookup, insert, delete implementiert


  public Comparable lookup(Comparable x) {  // versucht, x nachzuschlagen
    int pos = find(x);                      // versuche, x zu finden
    if (pos >= 0) return inhalt[pos];       // falls gefunden: liefere Objekt,
            else return null;               // sonst melde Misserfolg
  }


  public boolean insert(Comparable x) {     // versucht, x einzufuegen
    int pos = find(x);                      // versuche, x zu finden
    if ((pos < 0) &&                        // falls x nicht gefunden
        (zustand[~pos]!=BELEGT)) {          // und falls Platz vorhanden:
       inhalt[~pos] = x;                    // fuege x ein
       zustand[~pos]= BELEGT;               // setze Zustand auf BELEGT
       return true;                         // melde Erfolg
    } else return false;                    // melde Misserfolg
  }


  public boolean delete(Comparable x) {     // versucht, x zu loeschen
    int pos = find(x);                      // versuche, x zu finden
    if (pos >= 0) {                         // falls x gefunden:
        zustand[pos] = GELOESCHT;           // setze Zustand auf GELOESCHT
        inhalt[pos]  = null;                // gib Verweis auf Objekt frei
        return true;                        // melde Erfolg
    } else return false;                    // melde Misserfolg
  }
}
```

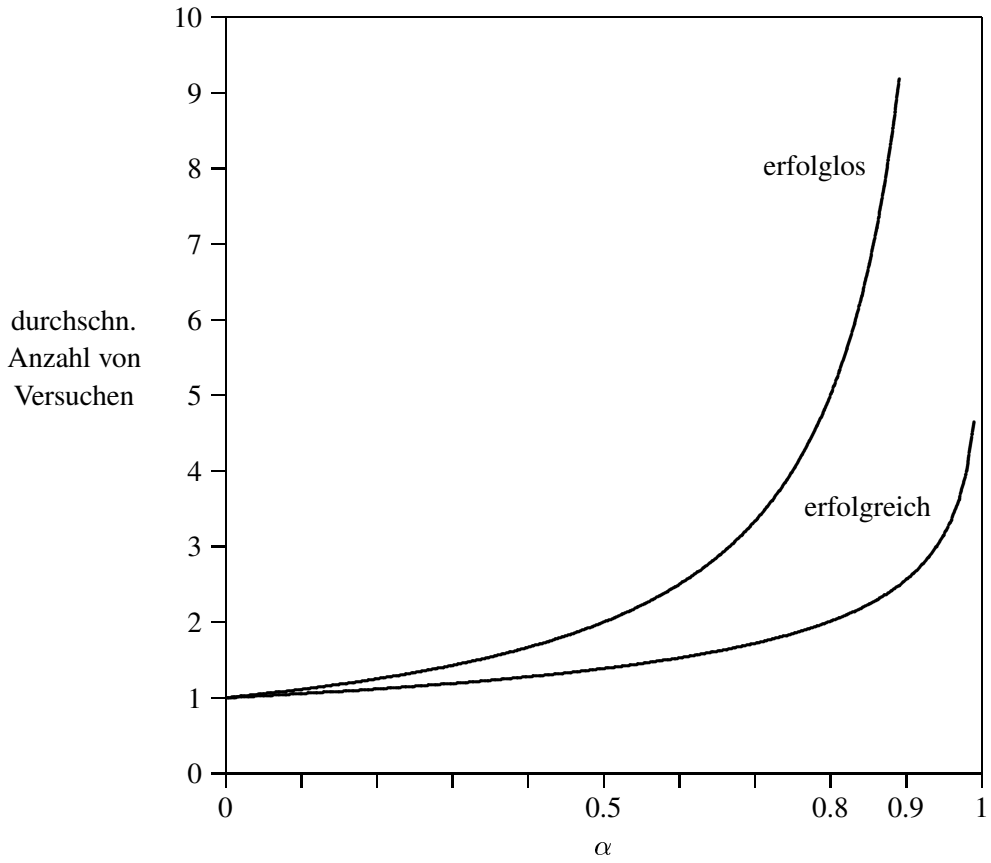
```
/****************************  HashTest.java  *******************************/

import AlgoTools.IO;

/** Testet die Hash-Tabelle mit String-Objekten. Verwendet werden:
 *  Objekte der Klasse StringComparable als Eintraege in der HashTable
 *  und ein Objekt der Klasse GeHashing als Instanz des Interface Menge
 */
public class HashTest {

    public static void main(String[] argv) {

        int groesse = IO.readInt("Bitte Groesse der Tabelle angeben: ");
        GeHashing h = new GeHashing(groesse);
        String s;

        IO.println("Gelegenheit fuer INSERT:");
        s = IO.readString("Bitte String (RETURN beendet): ");
        while (s.length()>0) {
            if (h.insert(new StringComparable(s)))
                 IO.println(s + " eingefuegt");
            else IO.println(s + " konnte nicht eingefuegt werden");
            IO.print(h);
            s = IO.readString("Bitte String: ");
        }

        IO.println("Gelegenheit fuer LOOKUP:");
        s = IO.readString("Bitte String (RETURN beendet): ");
        while (s.length()>0) {
            Comparable c = h.lookup(new StringComparable(s));
            if (c != null)  IO.println(c + " wurde gefunden");
            else            IO.println(s + " wurde nicht gefunden");
            IO.print(h);
            s = IO.readString("Bitte String: ");
        }

        IO.println("Gelegenheit fuer DELETE:");
        s = IO.readString("Bitte String (RETURN beendet): ");
        while (s.length()>0) {
            if (h.delete(new StringComparable(s)))
                 IO.println(s + " wurde geloescht");
            else IO.println(s + " wurde nicht geloescht");
            IO.print(h);
            s = IO.readString("Bitte String: ");
        }
    }
}
```

Laufzeit bei geschlossenem Hashing

Sei $\alpha \leq 1$ der Auslastungsfaktor. Dann ergibt sich für die Anzahl der Schritte mit Double-Hashing als Kollisionsstrategie bei

- erfolgloser Suche: $\approx \frac{1}{1-\alpha} = 5.0$, für $\alpha = 0.8$
- erfolgreicher Suche: $\approx -\frac{ln(1-\alpha)}{\alpha} = 2.01$, für $\alpha = 0.8$

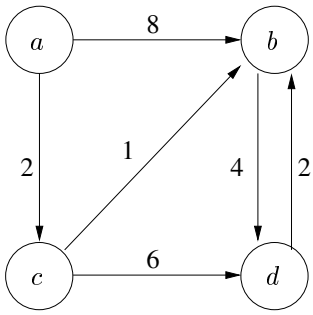
d.h., in 2 Schritten wird von 800.000 Elementen aus einer 1.000.000 großen Tabelle das richtige gefunden.



Kapitel 11

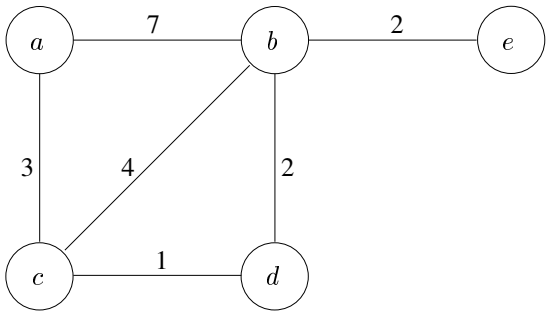
Graphen

Ein *gerichteter Graph* $G = (V, E)$ besteht aus *Knotenmenge* V
und *Kantenmenge* $E \subseteq V \times V$



$V = \{a, b, c, d\}$
$E = \{(a, c), (a, b), (c, b), (c, d), (d, b), (b, d)\}$

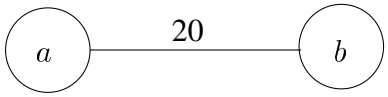
Ein *ungerichteter* $G = (V, E)$ besteht aus *Knotenmenge* V
und *Kantenmenge* $E \subseteq P_2(V)$ = 2-elem. Teilmengen von V.



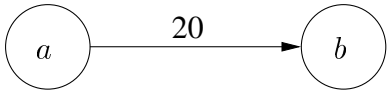
Kanten können gewichtet sein durch eine *Kostenfunktion* $c : E \to \mathbb{Z}$.

Mit Graphen können zwischen Objekten ($\hat{=}$ Knoten) binäre Beziehungen ($\hat{=}$ Kanten) modelliert werden.

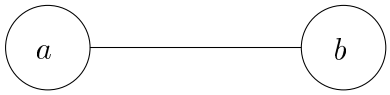
1.) Orte mit Entfernungen



Länge
Kosten
Dauer

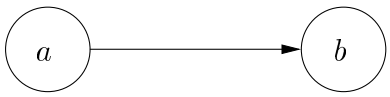


2.) Personen mit Beziehungen

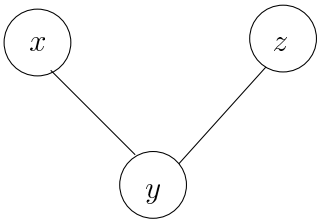


verheiratet mit

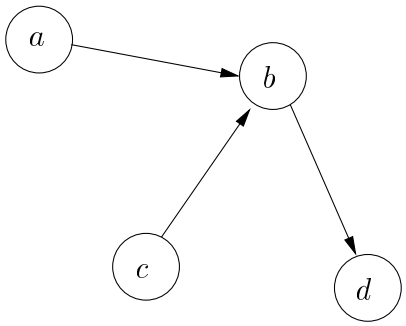
3.) Ereignisse mit Vorrang



a muß vor b geschehen



x ist zu y adjazent
x und y sind Nachbarn
x und z sind unabhängig
Der Grad von y ist 2



a ist Vorgänger von b
b ist Nachfolger von a
Eingangsgrad von b ist 2
Ausgangsgrad von b ist 1

Ein *Weg* ist eine Folge von adjazenten Knoten.
Ein *Kreis* ist ein Weg mit Anfangsknoten = Endknoten.

11.1 Implementation von Graphen

Es sei jedem Knoten eindeutig ein Index zugeordnet. Für den gerichteten Graphen auf Seite 149 ergibt sich:

Index	Knoten
0	a
1	b
2	c
3	d

Implementation durch Adjazenzmatrix

	0	1	2	3
0	0	1	1	0
1	0	0	0	1
2	0	1	0	1
3	0	1	0	0

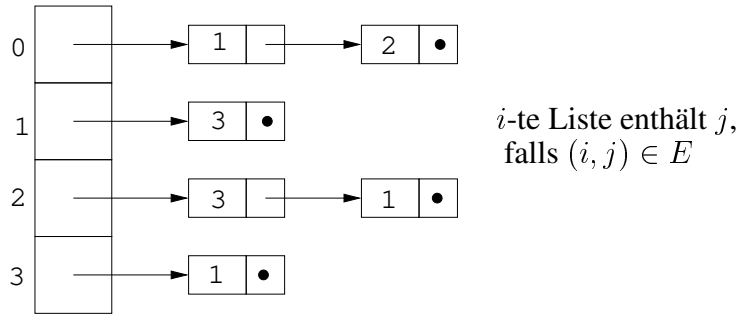
$$m[i][j] := \begin{cases} 1, & \text{falls } (i,j) \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

	0	1	2	3
0	0	8	2	∞
1	∞	0	∞	4
2	∞	1	0	6
3	∞	2	∞	0

$$m[i][j] := \begin{cases} c(i,j), & \text{falls } (i,j) \in E \\ 0, & \text{falls } i = j \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

Platzbedarf $= O(|V|^2)$.
Direkter Zugriff auf Kante (i, j) in konstanter Zeit möglich.
Kein effizientes Verarbeiten der Nachbarn eines Knotens.
Sinnvoll bei dicht besetzten Graphen.
Sinnvoll bei Algorithmen, die wahlfreien Zugriff auf eine Kante benötigen.

Implementation durch Adjazenzlisten



Platzbedarf $= O(|E|)$
Kein effizienter Zugriff auf Kante (x, y) möglich.
Sinnvoll bei dünn besetzten Graphen.
Sinnvoll bei Algorithmen, die, gegeben ein Knoten x, dessen Nachbarn verarbeiten müssen.

11.2 Graphalgorithmen

Die auf den folgenden Seiten verwendete Java-Implementation von gerichteten, unbewerteten Graphen stützt sich auf ein Array von Listen, welches in effizienter Weise das Abarbeiten der Nachbarn eines Knotens mit folgenden Methoden erlaubt:

```
void    reset         (int x); // setzt die Adjazenzliste fuer x zurueck
boolean moreNeighbors (int x); // testet, ob es weitere Nachbarn von x gibt
int     nextNeighbor  (int x); // liefert den naechsten Nachbarn von x
```

Die Klasse `Graph_IO` wurde definiert, um Graphen vom Benutzer einzulesen und ihre momentane Struktur anzuzeigen.

Die Klasse `Graph_Tiefensuche` führt auf einem gerichteten Graphen unter Verwendung eines Kellers eine Tiefensuche durch und vergibt Nummern an Knoten in der Reihenfolge, in der sie besucht werden. Bei nicht zusammenhängenden Graphen muß dazu die Suche mehrfach gestartet werden.

Die Klasse `Graph_TopoSort` führt auf einem gerichteten Graphen eine sogenannte topologische Sortierung durch und versucht eine Knoten-Nummerierung f : V $\rightarrow \mathbb{N}$ zu finden, die mit den Kantenrichtungen kompatibel ist, d.h. $(x, y) \in E \Rightarrow f(x) < f(y)$.

In der Klasse `Graph_Test` wird ein Graph eingelesen, angezeigt und die beiden Nummerierungen ermittelt.

```
/***************************  Graph.java  ************************************/

/** Abstrakter Datentyp Graph mit den Methoden number, insert, reset,
    moreNeighbors, nextNeighbor
 */

public class Graph {

  private Liste[] g;                    // g ist ein Array von Listen

  public Graph(int n) {                 // Konstruktor fuer Graph mit n Knoten
    g = new VerweisListe[n];            // besorge Platz fuer Array mit n Listen
    for (int i=0; i < n; i++)           // besorge n mal
      g[i] = new VerweisListe();        // Platz fuer eine Liste
  }

  public int number() {                 // liefere Zahl der Knoten
    return g.length;
  }

  public void insert(int i, int j){     // fuege fuer Knoten i den Nachbarn j ein
    g[i].insert(new Integer(j));
    g[i].advance();
  }

  public void reset(int i) {            // setze Nachbarschaftsliste i zurueck
    g[i].reset();
  }

  public void reset() {                 // setze Nachbarschaftslisten zurueck
    for (int i=0; i<g.length; i++)
      g[i].reset();
  }

  public boolean moreNeighbors(int i){ // teste, ob i weitere Nachbarn hat
    return !g[i].endpos();
  }

  public int nextNeighbor(int i) {      // liefere den naechsten Nachbarn
    Object o = g[i].elem();             // von Knoten i
    g[i].advance();                     // und ruecke eins weiter
    return ((Integer)o).intValue();     // liefere als int
  }
}
```

```
/************************  Graph_IO.java        ****************************/

import AlgoTools.IO;

/** Klasse zum Einlesen und zum Ausgeben von Graphen
 */

public class Graph_IO {                          // Ein- und Ausgabe von Graphen

  public static Graph einlesen(){                // lies Graph ein
    Graph g;                                     // Graph g
    int n = IO.readInt("Zahl der Knoten: ");     // erfrage Zahl der Knoten
    g = new Graph(n);                            // lege Graph an
    int[]a;                                      // array fuer Adjazenzliste
    for (int i=0; i<n; i++) {                    // fuer jeden Knoten
      a = IO.readInts("Nachbarn von "+i+": ");   // erfrage die Nachbarn
      for (int j=0; j<a.length; j++)             // fuer jeden Nachbarn von i
        g.insert(i,a[j]);                        // fuege ihn bei Knoten i ein
    }                                            //
    g.reset();                                   // setze Graph zurueck
    return g;                                    // liefere Graph ab
  }

  public static void ausgeben(Graph g) {         // gib Graph aus
    for (int i=0; i<g.number(); i++){            // fuer jeden Knoten
      IO.print(i + " : ");                       // drucke seinen Namen
      while (g.moreNeighbors(i)) {               // fuer jeden Nachbarn
        IO.print(" " + g.nextNeighbor(i));       // drucke dessen Namen
      }                                          //
      IO.println();                              // Zeilenumbruch
    }                                            //
    g.reset();                                   // setze Adjazenzlisten zurueck
  }

}
```

```
/************************  Graph_Tiefensuche.java ***************************/

/**    Tiefensuche auf einem Graphen                                        */

public class Graph_Tiefensuche {                // Tiefensuche auf Graphen

  static int id=0;                              // Variable fuer lfd. Nummer
  static boolean[]besucht;                      // zum Notieren, wer besucht ist
  static int[]ergebnis;

  private static void visit (Graph g, int k ) { // Tiefensuche beginnend bei k
    int x;                                      // Knotenname
    ergebnis[id++]=k;                           // notiere Knoten im Ergebnis
    besucht[k] = true;                          // markiere als besucht

    g.reset(k);                                 // setze Nachbarn von k zurueck
    while (g.moreNeighbors(k)) {                // solange es noch Nachbarn gibt
      x =  g.nextNeighbor(k);                   // besorge naechsten Nachbarn
      if (!besucht[x]) visit(g,x);              // starte ggf. neue Rekursion
    }
  }

  public static int[]tiefensuche (Graph g) {    // oeffentliche Methode

    int k;                                      // aktueller Knoten
    besucht = new boolean[g.number()];          // lege array besucht an
    ergebnis= new int[g.number()];              // lege array ergebnis an

    for (k=0; k<g.number(); k++)                // notiere jeden Knoten
      besucht[k]=false;                         // als nicht besucht

    for (k=0; k<g.number(); k++)                // fuer jeden nicht besuchten
      if (!besucht[k]) visit(g,k);              // Knoten starte Rekursion

   return ergebnis;                             // liefere Ergebnis
  }
}
```

```
/************************  Graph_TopoSort.java ******************************/

/** Topologisches Sortieren eines gerichteten Graphen                        */

public class Graph_TopoSort {                    // Klasse mit einer Methode

  public static int[]sort (Graph g){             // zum topologischen Sortieren

    int i, j;                                    // Knotennamen
    int id=0;                                    // Nummerierungsvariable
    int[]indegree = new int[g.number()];         // Vektor mit Eingangsgraden
    int[]ergebnis = new int[g.number()];         // Vektor fuer Ergebnis

    for (i=0; i<g.number(); i++) indegree[i]=0; // setze indegree auf 0

    g.reset();                                   // setze Adjazenzlisten zurueck
    for (i=0; i<g.number(); i++) {               // fuer jeden Knoten i
      while (g.moreNeighbors(i)) {               // solange er Nachbarn hat
        j = g.nextNeighbor(i);                   // hole Namen des Nachbarn
        indegree[j]++;                           // erhoehe dessen Eingangsgrad
      }
    }

    Schlange s = new ArraySchlange(g.number());// besorge eine Schlange

    for (i=0; i< g.number(); i++)                // jeder Knoten
      if (indegree[i]==0)                        // mit Eingangsgrad 0
        s.enq(new Integer(i));                   // kommt in die Schlange

    while (!s.empty()) {                         // solange Schlange nicht leer
      i = ((Integer)s.front()).intValue();       // hole Knoten aus Schlange
      ergebnis[id++]=i;                          // vergib naechste ID
      g.reset(i);                                // setze Knoten i zurueck
      while (g.moreNeighbors(i)){                // solange i Nachbarn hat
        j = g.nextNeighbor(i);                   // holen Namen des Nachbarn
        indegree[j]--;                           // erniedrige den Eingangsgrad
        if (indegree[j]==0)                      // falls Eingangsgrad jetzt 0
          s.enq(new Integer(j));                 // Knoten in Schlange stellen
      }
    }
    if (id==g.number())                          // falls genuegend IDs vergeben
                  return ergebnis;               // gib Ergebnis zurueck
                  else return null;              // sonst gib null zurueck
  }
}
```

```
/***************************  Graph_Test.java *********************************/
import AlgoTools.*;

/** Programm zum Testen der Graph-Algorithmen
 */

public class Graph_Test  {

  public static void main (String [] argv) {

    int i;
    int[]e;
    Graph g = Graph_IO.einlesen();
    Graph_IO.ausgeben(g);

    e = Graph_Tiefensuche.tiefensuche(g);
    IO.println("Reihenfolge fuer Tiefensuche: ");
    for (i=0; i<e.length; i++) IO.print(e[i],3);
    IO.println();

    e = Graph_TopoSort.sort(g);
    if (e==null)
      IO.println("Graph ist zyklisch");
    else {
      IO.print("Graph ist azyklisch. Reihenfolge: ");
      for (i=0; i<e.length; i++) IO.print(e[i],3);
    }

  }

}
```