Betrachte folgendes Problem (**Trennproblem**): $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, eine Patternmenge P in $\{0,1\}^n \times \{0,1\}$ seien gegeben. Gibt es ein Perzeptron, das auf P höchstens k Fehler macht? (k, n und P sind variabel.) Dieses Problem ist NP-vollständig.

Beweis: Reduktion vom hitting set.

Sei $(S = \{s_1, \ldots, s_n\}, C = \{c_1, \ldots, c_m\}, k)$ eine Instanz vom hitting set Problem mit $|c_1| = \ldots = |c_m| = l$.

Bsp: Menge a,b,c, Teilmengen {a,b}, {b,c}

Konstruiere daraus eine Instanz des Trennproblems:
Eingabedimension $n' = nl$, Trainingsmenge mit

$$\begin{array}{lcllllll} \vec{p}_i & = & (\vec{e}_i, & \vec{e}_i, & \ldots, & \vec{e}_i, & \vec{e}_i; & 1), \quad i = 1, \ldots, n, \\ \vec{p}^{\,1}_{c_j} & = & (\vec{e}_{i_1,\ldots,i_l}, & 0^n, & \ldots, & 0^n, & 0^n; & 0), \\ \vec{p}^{\,l}_{c_j} & = & (0^n, & 0^n, & \ldots, & 0^n, & \vec{e}_{i_1,\ldots,i_l}; & 0), \quad j = 1, \ldots, m, \end{array}$$

$\vec{e}_i \in \mathbb{R}^n$ ist der $i$te Einheitsvektor
$\vec{e}_{i_1,\ldots,i_l}$ ist 1 an den Positionen $i_1, \ldots, i_l$ und 0 sonst für $c_j = \{s_{i_1}, \ldots, s_{i_l}\}$

Bsp: n ist 6, Vektoren
(1,0,0,1,0,0;1)
(0,1,0,0,1,0;1)
(0,0,1,0,0,1;1)
(1,1,0,0,0,0;0)
(0,0,0,1,1,0;0)
(0,1,1,0,0,0;0)
(0,0,0,0,1,1;0)

Zeige: Diese Menge kann mit maximal k Fehlern getrennt werden dann und nur dann, wenn es ein hitting set der Größe k gibt.

Erste Richtung:
Es gebe ein hitting set c der Größe k. Definiere für die Gewichte $(w_{ij})_{i=1,\dots,l,j=1,\dots,n}$

$$w_{ij} = \begin{cases} 0 & s_j \notin c \\ -1 & s_j \in c \end{cases}$$

und $\theta = 0$. Das bildet genau die Punkte $\vec{p_i}$ mit $s_i \in c$ falsch ab.

Bsp: Hitting set der Groesse 1: $\{$b$\}$
w=(0,-1,0,0,-1,0) gibt

(1,0,0,1,0,0;1) :)
(0,1,0,0,1,0;1) :(
(0,0,1,0,0,1;1) :)
(1,1,0,0,0,0;0) :)
(0,0,0,1,1,0;0) :)
(0,1,1,0,0,0;0) :)
(0,0,0,0,1,1;0) :)

Zweite Richtung:
Sei umgekehrt eine Lösung mit maximal k Fehlern gegeben. Definiere ein hitting set c wie folgt: Falls $\vec{p_i}$ falsch ist, ist $s_i \in c$. Falls ein $\vec{p}^h_{c_j}$ falsch, aber alle $\vec{p_i}$ für Punkte s_i in c_j richtig sind, ist ein beliebiger Punkt aus c_j in c. Nehme an, ein c_j sei nicht von c getroffen. Dann bekäme man für alle $s_i \in c_j$:

$$\sum_{h=1}^{l} w_{hi} \geq \theta \Rightarrow \sum_{h=1}^{l} \sum_{s_i \in c_j} w_{hi} \geq l\theta$$

und für c_j selber für $h \in \{1, \ldots, l\}$:

$$\sum_{s_i \in c_j} w_{hj} < \theta \Rightarrow \sum_{h=1}^{l} \sum_{s_i \in c_j} w_{hi} < l\theta\,.$$

Widerspruch.

Bsp: Gewicht (1,1,0,-0.5,-0.5,0), Bias 0

(1,0,0,1,0,0;1) +
(0,1,0,0,1,0;1) +
(0,0,1,0,0,1;1) +
(1,1,0,0,0,0;0) :(
(0,0,0,1,1,0;0) -
(0,1,1,0,0,0;0) :(
(0,0,0,0,1,1;0) -

Hitting set: was aus $\{$a,b$\}$ und was aus $\{$b,c$\}$