Computergrafik

Vorlesung gehalten im SS 2000

Oliver Vornberger
Olaf Müller

Fachbereich Mathematik/Informatik
Universität Osnabrück

Literatur

- U. Claussen:
  "Programmieren mit OpenGL", Springer, 1997
- J. Encarnaçaõ, W. Straßer, R. Klein:
  "Graphische Datenverarbeitung 1 + 2", Oldenbourg Verlag, 1996
- W. D. Fellner:
  "Computergrafik", BI Wissenschaftsverlag, 1992.
- J. D. Foley, A. van Dam, S. K. Feiner, J. F. Hughes, R. L. Phillips:
  "Grundlagen der Computergraphik", Addison Wesley, 1994.
- J. D. Foley, A. van Dam, S. K. Feiner et al:
  "Computer Graphics: Principle and Practice", Addison Wesley, 2000.
- Fritz Jobst:
  "Programmieren in Java", Hanser, 1999.
- M. Woo, J. Neider, T. Davis, et al:
  "OpenGL Programming Guide: The Official Guide to Learning OpenGL 1.2", Addison Wesley, 1999
- J. Zukowski:
  "Java AWT Reference", O'Reilly, 1997.

Danksagung

Wir danken ...

... Gerda Holmann und Astrid Heinze für sorgfältiges Erfassen des Textes und Erstellen der Grafiken,

... Frank M. Thiesing für intensive Mitwirkung an der inhaltlichen Gestaltung der Vorlesung,

... Frank Lohmeyer für die Erstellung umfangreicher Java-Software zur Implementation von Beispielapplikationen,

... Viktor Herzog für die Konvertierung des Skripts nach HTML.

HTML-Version
Der Inhalt dieser Vorlesung kann online betrachtet werden unter
`http://www-lehre.informatik.uni-osnabrueck.de/~cg`

Osnabrück, im Juli 2000

(Oliver Vornberger) (Olaf Müller)

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung **11**

1.1 Motivation 11

1.2 Definition 11

1.3 Anwendungen 12

1.4 Kurze Geschichte der Computergrafik 12

1.5 Ausgabegeräte 13

1.5.1 Soft Copy 13

1.5.2 Random Scan versus Raster Scan 13

1.5.3 Hardcopy 14

1.6 Eingabegeräte 14

1.6.1 Technische Klassifizierung der Eingabegeräte 14

1.6.2 Logische Klassifizierung der Eingabegeräte 14

1.6.3 Eingabetechnik mit der Maus 15

1.6.4 Eingabe-Modi 15

2 Grafische Oberflächen und ihre Programmierung **17**

2.1 Der Window-Manager 17

2.2 Eventhandling 18

2.3 Eigene Applikationen 18

2.4 Das X-Window-System 19

2.4.1 Begriffe 19

2.4.2 Architektur 20

2.4.3 Ressourcen 21

2.5 Beispiele für Widget-Sets 22

2.6 Swing 24

2.6.1 Java 24

2.6.2 Swing-Übersicht 26
2.7 Swing-Beispielapplikation 30
2.8 Java-Applet 32

3 2D-Grundlagen 33
3.1 Koordinatensysteme 33
3.2 Linie 35
3.2.1 Antialiasing 39
3.3 Polygon 40
3.4 Kreis 40

4 2D-Füllen 45
4.1 Universelle Füll-Verfahren 45
4.2 Scan-Line-Verfahren für Polygone 49
4.3 Dithering 57

5 Clipping 59
5.1 Clipping von Linien 59
5.2 Clipping von Polygonen 63
5.3 Beispiel-Applet zu 2D-Operationen 66

6 2D-Transformationen 67
6.1 Translation 67
6.2 Skalierung 67
6.3 Rotation 69
6.4 Homogene Koordinaten 71
6.5 Allgemeine Transformationen 73
6.6 Raster-Transformationen 73

7 Kurven 75
7.1 Algebraischer Ansatz 75
7.2 Splines 75
7.3 Bézier-Kurven 79
7.4 B-Splines 81
7.5 NURBS 83
7.6 Beispiel-Applet zu Splines 84

7.7 Macromedia Flash 84

8 Fraktale **87**

8.1 Selbstähnlichkeit 87
8.2 Koch'sche Schneeflocke 87
8.3 Fraktale Dimension 88
8.4 Lindenmayer-Systeme 90
8.5 Baumstrukturen 91
8.6 Mandelbrot-Menge 94
8.7 Julia-Menge 98
8.8 Beispiel-Applet zu Fraktalen 101
8.9 Iterierte Funktionensysteme 102
8.10 Beispiel-Applet zu Iterierten Funktionensystemen 104

9 Farbe **107**

9.1 Physik 107
9.2 Dominante Wellenlänge 108
9.3 Grundfarben 108
9.4 RGB-Modell (Rot, Grün, Blau), (additiv) 110
9.5 CMY-Modell (Cyan, Magenta, Yellow), (subtraktiv) 110
9.6 Das YIQ-Modell 111
9.7 YUV-Modell 112
9.8 HSV-Modell 112
9.9 HLS-Modell 115
9.10 Color Data Base 116
9.11 CNS 116
9.12 Color Table (Farbtabelle) 116
9.13 Beispiel-Applet zu Farbe 119

10 Pixeldateiformate **121**

10.1 TIF 121
10.2 PBM, PGM, PNM und PPM 125
10.3 Photo-CD 127
10.4 Auflösung 128
10.5 LZW-Komprimierung (Lempel/Ziv/Welch, 1984) 130

10.6 GIF 131
10.7 Erzeugung einer bildbezogenen Farbtabelle 132
10.8 Kompression nach JPEG 136

11 3D-Grundlagen **145**
11.1 Repräsentation und Darstellung 145
11.2 3D-Koordinatensystem 146
11.3 Länge und Kreuzprodukt 146
11.4 Skalarprodukt 147
11.5 Matrixinversion 148

12 3D-Repräsentation **149**
12.1 Elementarobjekte 149
12.2 Drahtmodell 149
12.3 Flächenmodell 149
12.4 CSG (constructive solid geometry) 151
12.5 Flächenmodell mit Halbkantendarstellung 152

13 3D-Transformationen **155**
13.1 Translation 155
13.2 Skalierung 155
13.3 Rotation 156
13.4 Transformation von Koordinatensystemen 159
13.5 Transformation der Normalenvektoren 160

14 Projektion **161**
14.1 Bildebene 161
14.2 Perspektivische Projektion 162
14.3 Parallelprojektion 164
14.3.1 Normalprojektionen 164
14.3.2 Schiefe Projektionen 164

15 Betrachtungstransformationen **167**
15.1 Die synthetische Kamera 167
15.2 Viewing Pipeline 168
15.2.1 Modeling-Transformationen 169

15.2.2 View Orientation 169
15.2.3 View Volume 171
15.2.4 View Mapping 172
15.2.5 Device Mapping 176
15.2.6 Zusammenfassung 177

16 3D-Objekte **179**
16.1 Polyeder 179
16.1.1 Würfel 180
16.2 Gekrümmte Flächen 180
16.2.1 Zylinder 180
16.2.2 Kugel 181

17 Entfernen verdeckter Kanten und Flächen **183**
17.1 Back-Face Removal/Culling 183
17.2 Hidden-Surface Removal 184
17.2.1 z-Buffer-Algorithmus 185
17.3 Beispiel-Applet zur Wire-Frame-Projektion 186

18 Rasterung von Flächen **187**
18.1 Beleuchtung 188
18.1.1 Lichtquellen 189
18.1.2 Reflexionseigenschaften 190
18.1.3 Oberflächeneigenschaften 190
18.1.4 Materialeigenschaften 192
18.2 Schattierungsalgorithmen 192
18.2.1 Flat-Shading 192
18.2.2 Gouraud-Shading 193
18.2.3 Phong-Shading 194
18.3 Schatten 194
18.4 Texture Mapping 195
18.5 Beispiel-Applet zum Rendering 196

19 Die Viewing-Pipeline im Überblick **197**

20 Radiosity **199**

20.1 Globale Beleuchtung 199
20.2 Physikalische Ausgangslage 200
20.3 Die Radiosity-Gleichung (Beleuchtungsgleichung) 200
20.4 Berechnung der Formfaktoren 202
20.5 Interpolation der Pixelfarben 204
20.6 Schrittweise Verfeinerung 204
20.7 Screenshots 207

21 Ray Tracing **209**
21.1 Grundlagen 209
21.2 Ermittlung sichtbarer Flächen durch Ray Tracing 210
21.3 Berechnung von Schnittpunkten 211
21.4 Effizienzsteigerung zur Ermittlung sichtbarer Flächen 211
21.5 Rekursives Ray Tracing 213
21.6 Public Domain Ray Tracer Povray 217

22 Caligary trueSpace **219**

23 VRML **223**
23.1 Geschichte 223
23.2 Einbettung 224
23.3 Geometrie 225
23.4 Polygone 226
23.5 Wiederverwendung 227
23.6 Multimedia 228
23.7 Interaktion 229
23.8 Animation 230
23.9 Scripts 231
23.10Multiuser 233

24 OpenGL **235**
24.1 Grundlagen 235
24.2 Syntax 237
24.3 Programmbeispiele 238
24.4 Screenshots 252

Kapitel 1

Einführung

1.1 Motivation

- "Ein Bild sagt mehr als 1000 Worte."
- Das Auge erfaßt 40 Millionen Bits pro Sekunde.
- Lesegeschwindigkeit = 10 Worte pro Sekunde = $(10 \times 5 \times 8) = 400$ Bits pro Sekunde.
- $\Rightarrow$ Faktor 100.000.

1.2 Definition

Der Begriff *Grafische Datenverarbeitung* umfaßt

Computergrafik :
Beschreibung von Bildern
Eingabe der Beschreibung
Manipulation der Beschreibung
Ausgabe des zur Beschreibung gehörigen Bildes

Bildverarbeitung :
Verformung von Bilddaten (z.B. Drehung)
Verbesserung von Bilddaten (z.B. Kontrasterhöhung)
Vereinfachung von Bilddaten (z.B. Farbreduzierung)

Mustererkennung :
Analyse von Bilddaten
z.B. wo verläuft die Straße?
z.B. um welchen Buchstaben handelt es sich?

1.3 Anwendungen

Typische Anwendungsbereiche von Computergrafik:

- Grafische Benutzeroberflächen
  Point & Click statt Kommandos
- Business-Grafik
  Balken & Torten statt Zahlenfriedhof
- Kartografie
  Landkarten, Flächennutzungsplan
- CAD (Computer aided design)
  Entwurf von Autos, Häusern, Maschinen, VLSI-Chips
- Echtzeitsimulation und -animation
  Flug- und Fahrsimulator
- Überwachungs- und Steuerungssysteme
- Medizin
  3D-Darstellung einer Computer-Tomographie
- Visualisierung im Forschungsbereich
  Darstellung von Funktionen, Darstellung von Molekülen
- Unterhaltung
  Computerspiele, Spielfilme, Virtual Reality, Cyberspace

1.4 Kurze Geschichte der Computergrafik

1950	grobe Grafikdarstellung mit Matrixdrucker
1950	computergesteuerte Kathodenstrahlröhre
1963	Dissertation von Ivan Sutherland: *Sketchpad - A Man Machine Graphical Communication System*
1964	Automobilentwurf bei GM; Anfänge von CAD/CAM
1965	Doug Engelbart: Maus ersetzt Lichtgriffel
1980	Apple Macintosh und IBM PC mit Bitmap-Grafik und Maus
1985	GKS: Grafisches Kernsystem
1986	X-Windows vom MIT
1987	GKS-3D
1988	PHIGS: Programmer's Hierarchical Interactive Graphics System
1989	PEX: PHIGS Extension to X
1991	CGI: Computer Graphics Interface
1992	ISO PHIGS PLUS: (+ Rendering)
1993	OpenGL

1.5 Ausgabegeräte

1.5.1 Soft Copy

- Refresh-Bildschirm
  Kathode emittiert Elektronen zur Anode (Phosphorschirm). Ablenkung erfolgt durch Magnetfeld. Auffrischung mit > 50 Hz.

- Speicherbildschirm
  leuchtet extrem lang nach
  Vorteil: flimmerfrei
  Nachteil: kein selektives Löschen

- Farbbildröhre
  Schirm ist mit Tripeln von rotem, grünem, blauem Phosphor beschichtet, davor Lochplatte, 3 Kathoden

- Flach-Bildschirme

  - Plasma-Schirm
    2 Glasplatten mit horizontalen und vertikalen Leiterbahnen, dazwischen, an den Kreuzungspunkten der Leiterbahnen, Zellen mit Neongas.
  - LCD-Schirm (Liquid Crystal Display)
  - TFT-Schirm (Thin Film Transistor)

  Vorteil: flach, leicht, flimmerfrei, hoher Kontrast (TFT)
  Nachteil: noch relativ teuer

1.5.2 Random Scan versus Raster Scan

- Random Scan = vektororientiert
  Im Display-File liegen Vektorinformationen, die permanent angezeigt werden.
  Vorteil: hohe Auflösung
  Nachteil: Füllung schwierig, nur Linien

- Raster Scan
  Elektronenstrahl tastet Schirm zeilenweise ab. Holt Information für jedes Pixel (**pic**ture **el**ement) aus frame buffer (Bildwiederholspeicher) = VIDEO-RAM, beschrieben vom Grafikprozessor.
  Vorteil: beliebig komplexer Bildaufbau
  Nachteil: diskrete Darstellung der Pixel: Linien müssen durch Rasterung (Scan Conversion) dargestellt werden. Antialiasing erforderlich.

1.5.3 Hardcopy

- Plotter (zeichnet mit Stiften aus Magazin)
- Matrixdrucker (setzt Nadeln auf Farbband)
- Tintenstrahldrucker (spritzt Farbtropfen aus Düse)
- Laserdrucker (überträgt aufgeladene Tonerpartikel)
- Thermosublimationsdrucker (löst Farbpigmente aus Folie)

1.6 Eingabegeräte

1.6.1 Technische Klassifizierung der Eingabegeräte

- Keyboard (Tastatur)
- Paddles (Drehknopf), z.B. bei CAD-Arbeitsplätzen zum Transformieren
- Joy-Stick (relative Koordiatenerfassung durch Stift-Auslenkung)
- Maus (relative Koordiatenerfassung durch Rollrad-Bewegung)
- Track-Ball (versenkte Kugel)
- Tablett (absolute Koordinatenerfassung durch Induktion im Drahtgitter)
- Lichtgriffel (Stift mit Photodiode)
- Touch Panel (Bildschirm zum Anfassen)
- Frame Grabber (Übernahme des Signals einer Videokamera)
- Scanner (optisches Abtasten und Digitalisieren einer Bildvorlage)
- 3D-Scanner (optisches Erfassen der Körper-Koordinaten und -Texturen)

1.6.2 Logische Klassifizierung der Eingabegeräte

Locator:	liefert Position	z.B. Joy-Stick, Trackball, Maus, Griffel, Tablett
Stroke:	liefert Folge von Positionen	z.B. Maus, Griffel, Tablett
Valuator:	liefert skalaren Wert	z.B. Keyboard, Paddles
Choice:	liefert Auswahl	z.B. Maus, Griffel, Touch Panel
Pick:	wählt angezeigtes Objekt	z.B. Maus, Griffel, Touch Panel
String:	liefert Zeichenfolge	z.B. Keyboard

Simulation möglich, z.B. Maus simuliert Valuator durch Scrollbar.

1.6.3 Eingabetechnik mit der Maus

- Objekte picken und platzieren
- Objekte picken und modifizieren (skalieren, dehnen, rotieren, ...)
- Objekte zeichnen
- eingeblendetes Gitter zur Orientierung
- *snap*: Absetzen nur an Gitterpunkten
- *Rubber Band*: Andeutung der Umrisse während des Bewegens
- horizontale oder vertikale Beschränkung beim Bewegen

Probleme bei Pick

- Benutzer tippt nur in die Nähe.
- Benutzer muß gefüllte Objekte picken können.
- Benutzer muß verdeckte Objekte picken können.

1.6.4 Eingabe-Modi

Kommunikation zwischen Anwendungsprogramm und Eingabegeräten:

- Anforderungsmodus (Request Mode)
  Programm wartet auf Eingabe, z.B. Tastendruck, Buttondruck.
  Eingabegerät ist nur aktiv, wenn Daten benötigt werden.
- Abfragemodus (Sample Mode)
  Eingabegerät ist parallel zur Applikation aktiv und aktualisiert laufend die gemessenen Daten, z.B., Tablett sendet permanent (x, y)-Werte.
- Ereignismodus (Event Mode)
  Eingabegerät entkoppelt von Programm, parallel aktiv.
  Eingabegerät füttert Event-Queue, die von der Applikation geleert wird, z.B., Benutzer klickt mehrere Bildschirm-Buttons an.
  Programm kann spezielle Events entnehmen.

Kapitel 2

Grafische Oberflächen und ihre Programmierung

Das erste Window-System wurde in den 70er Jahren von Xerox PARC entwickelt. Ende der 70er Jahre traten die grafischen Oberflächen mit den Apple Computern Lisa und Macintosh ihren Siegeszug an.

Grafische Benutzungsoberflächen haben sich heute zum Standard für anwenderfreundliche Applikationsprogramme entwickelt und rein textuelle Mensch-Maschine-Kommunikation weitgehend abgelöst. Was dem Benutzer im allgemeinen das Leben erleichtern soll, stellt für den Programmierer eine echte Herausforderung dar.

Auf dem zweidimensionalen Bildschirm müssen eine Vielzahl von Fenstern, Icons und Infoboxen mit unterschiedlichster Funktionalität dargestellt werden. Diese müssen durch Eingabegeräte wie Maus oder Tastatur vom Benutzer arrangiert, aktiviert oder mit Eingaben versehen werden können.

Neben der angestrebten intuitiven Bedienbarkeit von grafischen Benutzungsoberflächen erlaubt ein Window-System dem Benutzer auch die Ausgaben mehrerer Programme gleichzeitig zu beobachten und so quasi parallel zu arbeiten.

2.1 Der Window-Manager

Für die geometrische Verwaltung der einzelnen Anwendungen auf einem Bildschirm steht dem Anwender ein Window-Manager zur Verfügung. Er legt die Fenster-Layout-Politik fest.

Der Window-Manager manipuliert Umrandung, Größe und Position der Fenster sowie die Reihenfolge, in der die Anwendungen übereinanderliegen. So kann er verdeckte Fenster in den Vordergrund holen, Fenster über den Schirm bewegen und deren Größe verändern.

Für den Inhalt ihrer Fenster ist die Applikation selbst verantwortlich. Muß ein Fenster nachgezeichnet werden, weil es z.B. durch eine Verschiebe-Aktion nun nicht mehr verdeckt ist, sendet der Window-Manager lediglich eine Redraw-Nachricht an die Applikation.

Außerdem kann der Window-Manager neue Applikationen starten.

2.2 Eventhandling

Eine grafische Benutzeroberfläche muß in der Lage sein, auf zahlreiche verschiedene Ereignisse zu reagieren. Typische Events sind ein Mausklick, die Bewegung der Maus oder ein Tastendruck. Die Ereignisse betreffen aber nicht nur die Benutzereingaben, sondern auch die Interaktion zwischen Applikationen.

Z.B. ein Expose-Event wird beim Start einer neuen Applikation ausgelöst. Wird die Maus in ein Fenster gefahren, gibt es einen Enter-Event.

Die Zahl verschiedener Events wird durch Kombinationen multipliziert. Applikationen sollen häufig auf einen Doppelklick reagieren oder erst auf das Loslassen der Maustaste; die Bewegung der Maus bei gedrückter Taste wird oft zur Auswahl in Menüs verwendet.

Die unterschiedlichsten Ereignisse können zu beliebiger Zeit in beliebiger Reihenfolge auftreten. Ein gutes Anwendungsprogramm ist so geschrieben, daß es vom Benutzer gesteuert wird und nicht umgekehrt.

Das typische Schema für die Verarbeitung von Interaktionen in einem Anwendungsprogramm ist die Event-Loop. Nach dem Schema eines endlichen Automaten, der einen zentralen Wartezustand kennt, werden die Übergänge zu anderen Zuständen durch Benutzereingaben ausgelöst.

```
Darstellung des Ausgangsbilds
do {
    Auswahl von Befehlen oder Objekten ermöglichen
    /* Das Programm wartet unbestimmte Zeit, bis Benutzer etwas eingibt */
    warte auf Benutzereingabe
    switch (Eingabe) {
        bearbeite Eingabe und führe ggf. Kommando aus
        bei Bedarf Bildschirm aktualisieren
    }
}
while(!Ende) /* Benutzer hat nicht "Ende" gewählt */
```

2.3 Eigene Applikationen

Während der Window-Manager mit einer Reihe von Events umgehen kann, die zu seiner Funktionalität gehören, muß sich der Entwickler einer grafischen Applikation mit den Ereignissen, die diese betreffen, selbst auseinandersetzen.

Soll eine Anwendung z.B. auf einen Knopfdruck reagieren, so muß der Event eines Mausklicks im Bereich der grafischen Darstellung des Buttons vom Entwickler abgehandelt werden. Dazu ist es notwendig, ein Applikationsprogramm zu schreiben, das auf dieses Ereignis hin die gewünschte Funktion ausführt, den sogenannten *Callback*.

Für (fast) jedes Betriebssystem gibt es ein zugehöriges Oberflächensystem, das mit Hilfe eines API (Application Programmer's Interface) manipuliert werden kann. Die Programmierung einer grafischen Applikation erfolgt mit Hilfe einer Graphical User Interface (GUI)-Sprache,

die in einer Hochsprache alle notwendigen API-Vokabeln zur Beschreibung des Aufbaus und Ablaufs einer interaktiven grafischen Anwendung bereitstellt. Die Programmierung erfolgt zumeist in einer gängigen Programmiersprache, die GUI-Bibliotheken verwendet.

Unter UNIX ist die z.Zt. am meisten verbreitete Kombination X-Windows mit Xlib, Xt und dem Motif-Widget-Set. Die Programmierung erfolgt dabei meist mit Hilfe von C. Eine weitere Variante sind Bibliotheken, die auf diese Umgebung aufsetzen, wie z.B. Tk, das dann in Skript-Sprachen wie Tcl oder Perl5 verwendet werden kann.

Eine spezielle Umgebung kann unter Openstep verwendet werden, wo das dortige Applikation-Kit zusammen mit der Sprache Objective-C und diversen Openstep-Tools direkt mit dem Betriebssystem zusammenarbeitet. Noch enger ist die Verbindung zwischen Betriebssystem und Grafik-API unter MS-Windows, wo kaum noch zwischen beiden unterschieden werden kann. Die Programmierung erfolgt dort meist mit Hilfe von grafischen Interface-Buildern, wo nur noch wenige Teile einer Applikation in einer klassischen Programmiersprache (C, C++, Basic) implementiert werden müssen.

Im folgenden werden anhand des X-Window-Systems typische Vokabeln der API/GUI-Programmierung dargestellt.

2.4 Das X-Window-System

2.4.1 Begriffe

Das X-Window-System wurde 1984 am MIT entworfen, seit 1987 ist es in der Version X11 verfügbar, mittlerweile als Release 6. Es werden Routinen bereitgestellt zur maschinenunabhängigen und netzwerktransparenten Formulierung von interaktiven grafischen Bedienoberflächen. Der Bildschirm wird aufgeteilt in mehrere, ggf. sich überlappende, *Fenster* (windows) mit jeweils eigenen Ein-/Ausgabefunktionalitäten. Die Fenster bilden eine baumartige Hierarchie (Kind-Fenster, Eltern-Fenster, Geschwister). Das oberste Fenster (root window) ist der Bildschirm selbst. Hierunter liegen die *Top-Level-Fenster* der einzelnen Anwendungen. Ihre Plazierung übernimmt der Window-Manager. Die Plazierung der Kinder und Enkel der Top-Level-Fenster regelt der Anwendungsprogrammierer.

X-Programme laufen auf verschiedenen Plattformen unter diversen Betriebssystemen. Das Anwendungsprogramm, genannt *X-Client*, schickt Aufträge an den *X-Server*, der die Hardware bedient.

Aus Performancegründen läuft die Client-Software häufig auf leistungsstarken Rechnern im Netz, während für den Server ein kleiner PC oder ein X-Terminal verwendet werden kann.

X-Server und X-Client können auf denselben oder auf verschiedenen Rechnern laufen. Sie kommunizieren mit Hilfe des *X-Protokolls* auf asynchrone Weise (gepuffert). Es gibt vier Arten von Nachrichten: *requests, replies, events* und *errors*.

Der X-Server hat exklusive Kontrolle über die grafischen Ausgabegeräte einschließlich Tastatur. Der Server verwaltet die *Ressourcen*, das sind komplexe Datenstrukturen für Windows, Pixmaps, Fonts, Grafik-Kontexte. Der Client referiert die Ressource über ihre ID. Dadurch wird der Kommunikationsbedarf reduziert; außerdem können mehrere Clients dieselben Ressourcen verwenden.

Der X-Client schickt Kommandos oder fragt Zustände ab. Ein Client kann Kontakt zu mehreren Servern halten. Der *Window-Manager* ist ein weiterer X-Client — und damit austauschbar. Er plaziert, verziert und ikonifiziert die Top-Level-Fenster.

Ein grafisches Ausgabegerät wird *display* genannt. Dazu gehören ein Grafik-Speicher und ggf. mehrere Bildschirme, genannt *screens*. Ein display-Name setzt sich zusammen aus

```
(<Hostname> | <Internet-Nr> ) : <Server-Nr> [.<Screen-Nr>]
```

und kann über die Environmentvariable `DISPLAY` gesetzt werden:

```
sh% export DISPLAY=pan:0
sh% export DISPLAY=131.173.12.88:0
```

Zuvor muß der angesprochene Server seine Einwilligung gegeben haben. Um z.B. dem Rechner *kronos* die Ausgabe auf dem Rechner *pan* zu erlauben, setzt man auf *pan* das Kommando ab

```
sh% xhost +kronos
```

X-Clients arbeiten ereignisorientiert, d.h., sie reagieren auf *events*, die der Server an sie schickt. Durch Event-Masken legt der Client fest, welches Fenster über welche Ereignisse informiert werden soll.

2.4.2 Architektur

Das X-Window-System ist das Fenstersystem der UNIX-Welt. X-Anwendungen verwenden Routinen aus der Xlib-Bibliothek, aus den X Toolkit Intrinsics und aus einem Widget-Set.

`Xlib` enthält verschiedene Low-Level-Funktionen auf der Ebene des X-Protokolls. Z.B.

```
XDrawLine(display, window, gc, x1, y1, x2, y2);
```

zeichnet auf dem Ausgabegerät `display` im Fenster `window` unter Verwendung des Grafik-Kontextes `gc` eine Linie von Punkt `x1,y1` zu Punkt `x2,y2`.

Die X Toolkit Intrinsics, kurz *Xt Intrinsics*, sind ein Aufsatz auf die Xlib. Hiermit lassen sich die grafischen Grundobjekte, die *Widgets*, kreieren und manipulieren. *Widget* ist ein aus den Begriffen *Window* und *Gadget* zusammengesetztes Kunstwort und bedeutet Dialogobjekt. Z.B.

```
XtVaGetValues(widget, XmNwidth, &breite, XmNheight, &hoehe, NULL);
```

besorgt von einem Widget die Breite und Höhe und überträgt diese Werte in die Variablen `breite` bzw. `hoehe`.

Das X-Window-System stellt nur die Technik zur Verwaltung von grafischen Oberflächen zur Verfügung, die Toolkits hingegen bringen Verhalten ins Spiel, ein spezielles *Look-And-Feel* der Benutzerschnittstelle.

Ein *Widget-Set* ist eine Ansammlung von aufeinander abgestimmten Widget-Klassen, die sich durch Design und Funktionalität charakterisieren. Bekannte Beispiele für Widget-Sets sind OSF/Motif, Open Look und Athena Widgets.

In Motif gibt es z.B. einen dreidimensional aussehenden Druckknopf in der Klasse `XmPushButton` oder ein Anzeigefeld mit verschiebbarem Inhalt in der Klasse `XmScrolledWindow`. Widgets werden in Motif wie folgt klassifiziert:

Display-Widgets:	zum Anzeigen von Information z.B. `XmPushButton, XmToggleButton, XmText`
Container-Widgets:	zum Zusammenfassen der Kind-Widgets z.B. `XmForm, XmRowColumn`
Shell-Widgets:	spezielle Container-Widgets, eingesetzt als Top-Level-Fenster, stehen unter Verwaltung des Window-Managers. z.B. `XmDialogShell`

Die Widget-Klassen bilden einen Baum, bei dem die Kinder die Eigenschaften ihrer Eltern erben und erweitern. Aussehen und Verhalten der Widgets werden durch deren Ressourcen gesteuert. Z.B. besitzt ein Label-Widget die Ressourcen Widget-Größe, auszugebender Text, Font und Farbe des auszugebenden Textes. Manchen Widgets kann man die Adresse von Funktionen mitgeben. Eine solche Funktion, genannt *callback*, wird dann bei Eintreten eines bestimmten Ereignisses, z.B. Drücken eines Mausknopfes innerhalb des Widget-Fensters, aufgerufen.

2.4.3 Ressourcen

Die wichtigsten Ressourcen:

Eine *Pixmap* ist eine rechteckige Fläche von Farbwerten im Off-Screen-Bereich, geeignet für Hintergrund und Rand eines Fensters und für gefüllte Flächen. Die Farbtiefe, *depth*, legt fest, wieviel Bits pro Farbwert zur Verfügung stehen.

Eine *Bitmap* ist eine Pixmap mit Farbtiefe 1, geeignet für Schwarzweißbilder, Cursor-Formen und Masken für Maloperationen.
Ein *Cursor* ist eine sichtbare Repräsentation der Mausposition. Seine Form wird durch eine Bitmap definiert.

Ein *Font* ist ein nicht skalierbarer Zeichensatz. Nicht jeder X-Server kennt alle Fonts. Mit dem Kommando `xfontsel` können die verfügbaren Fonts und ihr Aussehen ermittelt werden.

Ein *Grafik-Kontext* legt für ein Fenster gewisse Parameter für Zeichenoperationen fest, z.B. Vordergrundfarbe, Strichstärke, Strichart, Verknüpfungsart.

Ressourcen können gesetzt werden im Programmtext, durch Flags beim Programmstart oder durch Erwähnung in einer Ressource-Datei.

2.5 Beispiele für Widget-Sets

Im folgenden werden mit verschiedenen Widget-Sets erstellte Applikationen gezeigt.

Abbildung 2.1: Java typisches Look-And-Feel

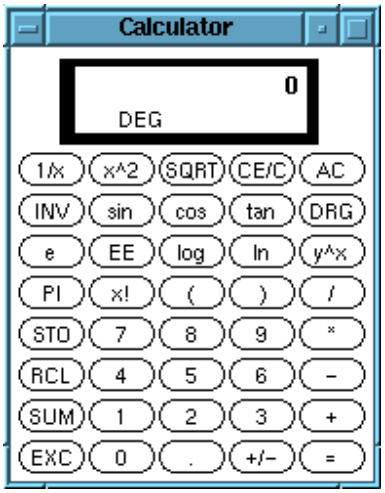


Abbildung 2.2: Athena: xcalc

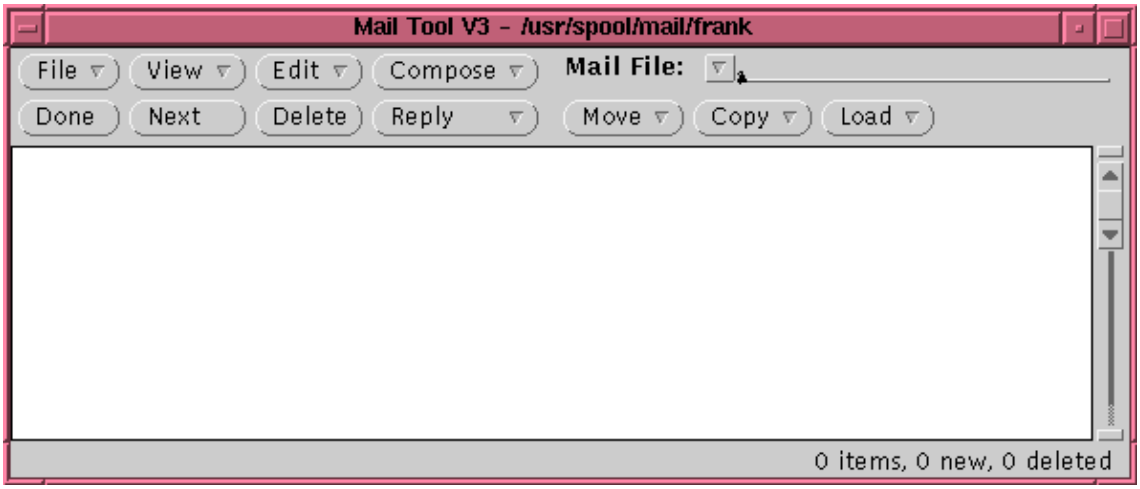


Abbildung 2.3: Open Look: mailtool

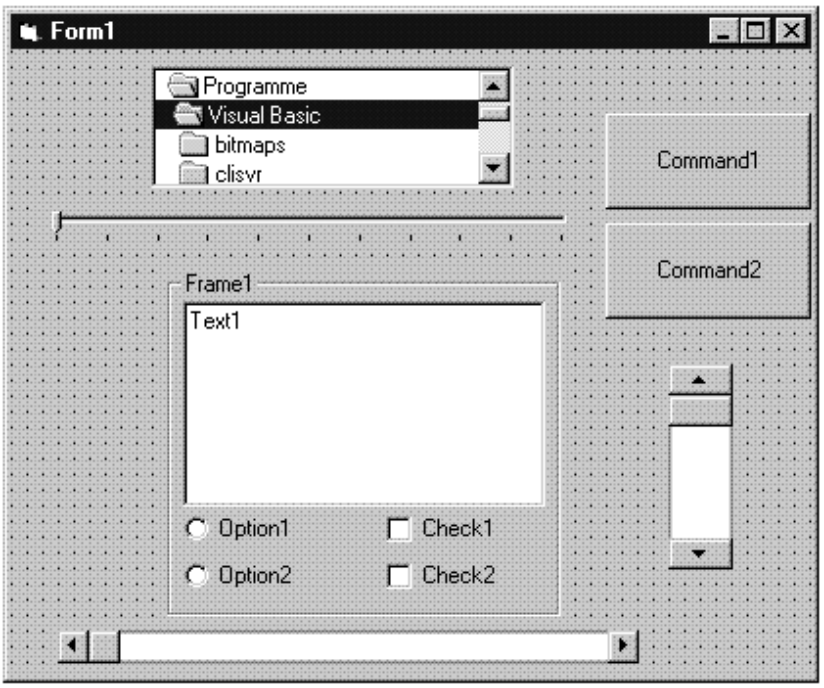


Abbildung 2.4: Windows-API mit VisualBasic

2.6 Swing

Betrachtet man die verschiedenen Systeme und ihre GUIs, so stellt man fest, daß die Funktionalität bei allen relativ ähnlich ist, die Programmierumgebungen aber völlig verschieden sind. Will man für eine Applikation eine grafische Benutzerschnittstelle entwickeln, die auf allen verwendeten Systemen eine identische Funktionalität aufweist, so benötigt man eine portable Programmierumgebung. Eine solche Umgebung sind die *Swing-Komponenten* der Programmiersprache Java. Sie sind eine Teilmenge der *Java Foundation Classes* (JFC), basieren auf dem *Abstract Window Toolkit* (AWT) und erweitern diees um eine Reihe mächtiger GUI-Elemente.

Das AWT umfaßt einige der Java-Standard-Klassen, die für die portable Programmierung von GUI-Applikationen entwickelt wurden. Es heißt *abstract*, weil es die GUI-Elemente nicht selber rendert, sondern sich auf existierende Window-Systeme abstützt. Im Gegensatz zum AWT kann mit den Swing-Komponenten eine Applikation so implementiert werden, daß alle GUI-Elemente unabhängig von der Plattform, auf der das Programm ausgeführt wird, das gleiche Aussehen und die gleiche Funktionalität haben (*pluggable look and feel* (plaf)). Unter Java2 beinhaltet dies auch den Austausch von Daten zwischen den GUI-Elementen durch den User (*drag and drop*). Dadurch, daß die Swing-Komponenten **keinen** architekturspezifischen Code enthalten, sind sie wesentlich flexibler als die AWT-Klassen. Diese Unabhängigkeit vom Betriebs- bzw. Window-System ist allgemein Teil der Java-Philosophie.

2.6.1 Java

Die Programmiersprache Java wird seit 1990 von der Arbeitsgruppe Gosling bei der Firma Sun entwickelt. Als architekturunabhängige Sprache wird Java seit Aufkommen des World Wide Web als ideal geeignet für die Internetprogrammierung angesehen.

Java wird von Sun beschrieben als

- einfach,
- objektorientiert,
- verteilt,
- interpretiert,
- robust,
- sicher,
- architekturunabhängig,
- portabel,
- hochperformant,
- multithreaded,
- dynamisch.

Java hat für die Basis-Befehle die Syntax von C übernommen und diese dann um Konstrukte zur objektorientierten Programmierung erweitert. Im Unterschied zu C++, wo ANSI-C als echte Teilmenge in der Sprache enthalten ist, wurden in Java Sprachelemente entfernt, hinzugefügt und geändert.

Ein weiterer, wesentlicher Unterschied ist, daß Java eine vollständig objektorientierte Sprache ist und keine Mechanismen besitzt, um z.B. Funktionen unabhängig von Klassen und Objekten zu implementieren.

Außerdem benutzt Java keine Zeiger, also insbesondere auch keine Funktionszeiger. Da Java keine Strukturen besitzt und Felder und Zeichenketten Objekte sind, besteht kein Bedarf für Zeiger. Java übernimmt automatisch das Referenzieren und Dereferenzieren von Objekten. Java implementiert zusätzlich eine Garbage Collection zur Speicherverwaltung.

Ein Beispiel

Das folgende Beispiel zeigt ein einfaches Java-Programm: Hello World.

```
public class HelloWorld {
    public static void main(String[] args) {
        System.out.println("Hello World!");
    }
}
```

Dieses Programm besteht, wie jedes Java-Programm, aus einer öffentlichen Definition. Die Klasse enthält eine Methode mit dem Namen `main()`, in der der Interpreter mit der Programmausführung beginnt.

Dieses Programm muß in einer Datei gespeichert werden, die den Namen der öffentlichen Klasse, gefolgt von der Erweiterung `.java`, besitzt. Die Übersetzung geschieht mit:

```
sh% javac HelloWorld.java
```

Dieses Kommando erzeugt die Datei `HelloWorld.class`. Um das Programm ablaufen zu lassen, wird der Java-Interpreter benutzt:

```
sh% java HelloWorld
```

Ein Programm in Java besteht im allgemeinen aus einer oder mehreren Klassendefinitionen, von denen jede in ihre eigene `.class`-Datei in *Java Virtual Machine*-Code übersetzt wird. Eine dieser Klassen muß eine `main()`-Methode definieren, in der das Programm seine Ausführung beginnt.

Der Java-Compiler erzeugt Bytecode statt direkten Maschinencode. Dieser Bytecode stellt ein architekturunabhängiges Objektdateiformat zur Verfügung, d.h., der Code ist dazu entworfen worden, Programme effizient auf verschiedene Plattformen zu transportieren. Ein Java-Programm kann auf jedem System laufen, das einen Java-Interpreter und ein Laufzeitsystem implementiert. Zusammengenommen implementieren beide die Java Virtual Machine.

2.6.2 Swing-Übersicht

In diesem Abschnitt wird eine kurze Übersicht der wesentlichen Konzepte der Swing-Komponenten und einiger AWT-Klassen gegeben. Die für die Programmierung notwendigen Details sind bei Java generell der HTML-On-Line-Dokumentation zu entnehmen.

Das Basis-Paket für Grafik- und Oberflächenprogrammierung ist `javax.swing`. Wie schon erwähnt, werden die dort zur Verfügung gestellten Klassen auf entsprechende Elemente eines schon vorhandenen Window-Systems abgebildet. Zu diesem Zweck gibt es das Paket `java.awt.peer`, das aber normalerweise vom Programmierer nicht direkt benutzt wird.

Weitere verwandte Klassen sind z.Zt. (d.h. in der Java-Version 1.1.x) `java.awt.image` mit Klassen für die direkte Manipulation von Bildern, `java.awt.event` für das neue Eventhandling-Konzept, sowie `java.awt.datatransfer` mit Möglichkeiten zum Datenaustausch zwischen Applikationen. Erwähnt werden sollte hier auch `javax.swing.applet`, dessen einzige Klasse `JApplet` verwendet wird, wenn man Java-Programme in einem HTML-Dokument benutzen will.

Die Klassen des swing-Pakets lassen sich grob in drei Gruppen einteilen: Grafikklassen, in denen grafische Objekte wie Farben, Fonts, Bilder beschrieben werden; Komponenten, d.h. Klassen, die GUI-Komponenten wie z.B. Buttons, Menüs und Textfelder zur Verfügung stellen; sowie Layout-Manager, die die Anordnung von GUI-Komponenten in einer Applikation kontrollieren. Aus den verwandten Paketen sollen hier noch die Event-Listener besprochen werden, mit deren Hilfe die Interaktion zwischen User und Applikationen implementiert werden muß. Die folgende Übersicht erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit, sondern beschreibt nur kurz die für Computergrafik-Programme wichtigen Klassen. Weitere Klassen sowie alle Details sind der entsprechenden On-Line-Dokumentation zu entnehmen.

Die Grafik-Klassen

Die Grafik-Klassen implementieren jeweils einen bestimmten Aspekt und sind weitgehend unabhängig voneinander. Wichtige Klassen des AWT sind `Color`, `Cursor`, `Font`, `FontMetrics`, `Image`, `MediaTracker`, deren Bedeutung aus dem jeweiligen Namen ersichtlich ist. Wichtige Hilfsklassen sind `Dimension`, `Point`, `Polygon`, `Rectangle`, die jeweils entsprechende Objekte verwalten. Dabei ist zu beachten, daß alle diese Objekte keine Methoden haben, mit denen sie sich z.B. auf dem Schirm darstellen können. Diese Funktionalität wird durch die Klasse `Graphcis` bereitgestellt, in der Methoden vorhanden sind, um Bilder und andere grafische Objekte zu zeichnen, zu füllen, Farben oder Fonts zu ändern, Ausschnitte zu kopieren oder zu clippen usw. Diese abstrakte Klasse wird von diversen Komponenten bereitgestellt und kann dann verwendet werden, um das Aussehen dieser Komponente zu manipulieren.

Die GUI-Komponenten

Die Komponenten, mit deren Hilfe der Benutzer mit einer Oberfläche interagieren kann, lassen sich in drei Gruppen einteilen:

Es gibt Komponenten, die andere Komponenten aufnehmen und anordnen können. Sie werden *Container* genannt und unterteilen sich wiederum in drei Gruppen:

- *Top-Level-Container*, wie `JFrame`, `JDialog` und `JApplet`, die jeweils ein eigenstaendiges "Fenster" erzeugen, das direkt in die grafische Benutztungsoberfläche eingeblendet und

vom Window-Manager verwaltet wird.

- *General-Purpose Container*, wie `JPanel` und `JScrollPane`, die in erster Linie beliebige andere Componenten aufnehmen und deshalb nur eingeschränkte eigene Funktionalität bieten.
- *Special-Purpose Container*, wie `JInternalFrame` und `JLayeredPane`, die eine festgelegte Rolle in der Benutzerschnittstelle spielen und deshalb nur eingeschränkt konfgurierbar sind.

Weiterhin gibt es Komponenten, die eine spezielle Funktionalität bereitstellen und als *Basic Controls* bezeichnet werden.

- `JButton`: Es wird ein mit einem Titel oder Bild versehenes Feld erzeugt, das mit der Maus angeklickt werden kann, wodurch ein entsprechender Event erzeugt wird.
- `JCheckbox`: Ein Schalter mit zwei Zuständen, der bei einem Mausklick diesen wechselt und dabei einen Event auslöst.
- `JComboBox`: Eine Gruppe von Einträgen, von der immer nur einer sichtbar ist. Das Auswählen eines Eintrags erzeugt einen entsprechenden Event.
- `JList`: Es wird eine Liste von Strings angezeigt, aus der Einträge selektiert bzw. deselektiert werden können, was zur Erzeugung von entsprechenden Events führt.
- `JScrollBar`: Ein Rollbalken, der mit der Maus bewegt werden kann, wodurch entsprechende Events erzeugt werden.

Außerdem gibt es noch *Displays*, die auf unterschiedliche aber für die einzelne Klasse spezifische Weise Informationen anzeigen. Einige Klassen können editierbar (*editable*) erzeugt werden:

- `JTextArea`: Ein Feld, in dem ein längerer Text angezeigt und evtl. editiert werden kann.
- `JTextField`: Ein Text-Feld, in dem ein einzelner String angezeigt und evtl. editiert werden kann.

Andere sind nicht editierbar (*uneditable*). Hierzu gehören z.B.:

- `JProgressBar`: Ein Fortschrittsanzeiger, der einen prozentualen Wert grafisch darstellen kann.
- `JLabel`: Diese einfachste Komponente erzeugt ein Feld, in dem ein String oder ein Bild ausgegeben wird.

Da es die hier genannten Komponenten zum Teil auch in *java.awt* gibt, wurde den Swing-Komponentennamen zur besseren Unterscheidung jeweils ein "J" vorangestellt.

Da alle Komponenten von der Klasse `javax.swing.JComponent` abgeleitet wurden, die ihrerseits von `java.awt.Container` abstammt, kann jede Instanz einer dieser Klassen wiederum selber andere Komponenten aufnehmen und diese in ihrem Inneren frei anordnen. Dieses *Layout* regelt eine weitere wichtige Gruppe von Klassen:

Die Layout-Manager

Die wesentliche Aufgabe eines Containers ist die Darstellung der darin enthaltenen Komponenten. Zur Steuerung der Anordnung dieser Komponenten werden Klassen verwendet, die das Interface `Layout-Manager` adaptieren. Ein solcher Layout-Manager implementiert dazu eine spezielle Layout-Politik, die mehr oder weniger konfigurierbar ist. Es gibt die folgenden vordefinierten Layout-Manager, die alle aus `java.awt` stammen:

- `FlowLayout`: Dies ist das einfachste Layout, welches bei `JPanel` voreingestellt ist. Jede Komponente wird in seiner bevorzugten Größe rechts von der vorigen Komponente eingefügt. Ist der rechte Rand des Containers erreicht, wird eine weitere Zeile angehängt, in der weitere Komponenten eingefügt werden können.

- `BorderLayout`: Dies ist ebenfalls ein einfaches Layout, das als Default-Layout bei `JFrame` verwendet wird. Es besteht aus den fünf Gebieten, Nord, Süd, Ost, West und Zentrum, in denen jeweils beliebige Komponenten plaziert werden können. Im Gegensatz zum `FlowLayout` werden hier die Komponenten an die Größe des Containers angepaßt: Die Nord- und Süd-Komponenten werden in X-Richtung gestreckt bzw. gestaucht; die Ost- und West-Komponenten in Y-Richtung und die Zentrums-Komponente in beiden Richtungen.

- `CardLayout`: Dies ist ein spezielles Layout, bei dem beliebig viele Komponenten eingefügt werden können, von denen aber immer nur eine zu sehen ist, da sie wie bei einem Kartenspiel übereinander angeordnet werden.

- `GridLayout`: Hier werden die Komponenten in einem zweidimensionalen Gitter angeordnet. Dabei werden alle Komponenten auf die gleiche Größe gebracht, wobei die größte Komponente die Gittergröße vorgibt.

- `GridBagLayout`: Dies ist der flexibelste Manager, mit dem beliebige Anordnungen möglich sind. Es wird wieder von einem zweidimensionalen Gitter ausgegangen, wobei hier jetzt aber eingestellt werden kann, wie viele Gitterzellen eine Komponente belegt und wie sie sich anpaßt.

Alle diese Layout-Manager bestimmen nur die Anordnung der GUI-Elemente, nicht aber deren Look-And-Feel. Diese Aufgabe übernimmt der *User Interface Manager* (`UIManager`). Mit dieser Klasse kann aus den mitgelieferten (z.Zt. Java, Mac, Motif und MS Windows) und evtl. selbstimplementierten Look-And-Feel's gewählt werden.

Event-Handling

Eine offene Frage ist nun noch, wie das Aktivieren einer GUI-Komponente eine entsprechende Aktion im Benutzer-Programm auslöst. Dazu gibt es in AWT folgendes Konzept: Eine Aktion des Benutzers — wie z.B. ein Mausklick — erzeugt in der Java-Maschine einen *Event*. Je nach Art der Aktion und des Kontextes, in dem sie stattfindet, ergeben sich verschiedene

Event-Typen, die wiederum verschiedene Argumente haben können. Eine Komponente kann für sie geeignete Events empfangen, indem ein sogenannter *Event-Listener* mit der Komponente verbunden wird. Für die verschiedenen Event-Typen gibt es verschiedene Listener, von denen einer oder mehrere bei einer Komponente eingetragen werden können. Ein Listener ist dabei ein Interface, in dem alle Methoden vorgegeben werden, die für eine Menge von zusammengehörigen Events notwendig sind. Tabelle 2.1 gibt eine Übersicht der verschiedenen Event-Listener:

Listener	Methoden	Komponenten
Action	actionPerformed	JButton, JList, JMenuItem, JTextField
Adjustment	adjustmentValueChanged	JScrollBar
Component	componentHidden	JComponent
	componentMoved	
	componentResized	
	componentShown	
Container	componentAdded	Container
	componentRemoved	
Focus	focusGained	JComponent
	focusLost	
Item	itemStateChanged	JCheckbox, JComboBox, JList
Key	keyPressed	JComponent
	keyReleased	
	keyTyped	
Mouse	mouseClicked	JComponent
	mouseEntered	
	mouseExited	
	mousePressed	
	mouseReleased	
MouseMotion	mouseDragged	JComponent
	mouseMoved	
Text	textValueChanged	JTextComponent
Window	windowActivated	JWindow
	windowClosed	
	windowClosing	
	windowDeactivated	
	windowDeiconified	
	windowIconified	
	windowOpened	

Tabelle 2.1: AWT-Event-Listener

Für einige der Swing-Komponenten wurden zusätzliche EventListener implementiert. Sie befinden sich in dem Paket `javax.swing.event`. Sie kommen nur bei spezialisierten Komponenten zum Einsatz und werden daher hier nicht ausführlich beschrieben.

2.7 Swing-Beispielapplikation

In diesem Abschnitt wird eine einfache Applikation gezeigt, die die Worte "Hello World!" in einem eigenen Fenster darstellt (siehe Abbildung 2.1).

Die Applikation besteht aus zwei Klassen. Die Klasse `Hello` stammt von `JPanel` ab und besitzt nur einen Konstruktor. Bei der Instanziierung wird ein `JLabel` der Größe $160 \cdot 120$ Pixel mit dem mittig plazierten String `Hello World!` erzeugt und zum Gebiet "Zentrum" des Containers (`JPanel`) hinzugefügt. Die Instanz der Klasse `Hello` enthält somit alle GUI-Komponenten, die die spezielle Funktionalität der Applikation ausmachen (hier die Darstellung eines Strings):

```
package HelloWorld;

import java.awt.Dimension;                          // Importliste mit allen
import java.awt.BorderLayout;                       // benoetigten Klassen aus
import javax.swing.UIManager;                       // dem AWT und aus den
import javax.swing.JLabel;                          // Swing-Komponenten
import javax.swing.JPanel;

public class Hello extends JPanel {
  /** Erzeugt eine Instanz der Klasse Hello. */
  public Hello() {
    JLabel l = new JLabel("Hello World!");          // Label mit Text erzeugen
    l.setHorizontalAlignment(JLabel.CENTER);        // horizontal zentrieren
    l.setPreferredSize(new Dimension(160,120));     // Groesse festlegen

    add(l, BorderLayout.CENTER);
  }
}
```

Es fehlt noch der Top-Level Container, der den Rahmen für die Applikation bildet, indem er die Instanz der Klasse `Hello` aufnimmt und dadurch diese auf der grafischen Benutzungsoberfläche darstellbar macht. Diese Funktion übernimmt die Klasse `HelloApp`. Sie besteht aus einem Konstruktor, der Methode `main` und den Methoden des Interfaces `WindowListener`.

In `main` wird nur der Konstruktor aufgerufen. Dort wird zunächst versucht die Applikation im javatypischen Look-And-Feel darzustellen. Falls die Wahl des Look-And-Feel mißlingt, wird das Look-And-Feel der zugrundeliegenden Benutzungsoberfläche realisiert. Anschließend wird ein Fensterobjekt `JFrame` erzeugt und dem Fensterbereich, der für die Darstellung von GUI-Elementen zur Verfügung steht (*Content Pane*), eine Instanz der Klasse `Hello` hinzugefügt. Abschließend wird die Größe der Applikation mit der Methode `pack` berechnet und das Fenster mit der Methode `setVisible` auf der grafischen Benutzungsoberfläche sichtbar gemacht. Mit dem Aufruf der Methode `addWindowListener(this)` wird dem Fenster mitgeteilt, daß es selber auf Events reagieren soll, die mit dem Öffnen, Schließen, (De)Aktivieren und (De)Ikonifizieren des Fensters zu tun haben.

Die Klasse `HelloApp` muß deshalb das Interface `WindowListener` adaptieren. Der Code enthält die sieben entsprechenden Methoden; die Rümpfe bleiben aber bis auf den von `windowClosing` leer, da sie hier nicht benötigt werden. Die Methode `windowClosing` wird aufgerufen, wenn

der User auf die "Fenster schließen"-Schaltfläche des Applikationsfensters geklickt hat. Durch Aufruf von `System.exit` wird die Applikation sofort beendet.

```
package HelloWorld;

import java.awt.event.WindowListener;            // Importliste mit allen
import java.awt.event.WindowEvent;               // benoetigten Klassen aus
import java.awt.Dimension;                       // dem AWT und aus den
import java.awt.BorderLayout;
import javax.swing.UIManager;                    // Swing-Komponenten
import javax.swing.JFrame;

public class HelloApp implements WindowListener {
  /** Erzeugt eine Instanz der Klasse Hello. */
  public HelloApp() {
    try {                                        // Versuche Look & Feel so zu
      UIManager.setLookAndFeel(                  // setzen, dass es auf allen
         // Systemen gleich aussieht
        UIManager.getCrossPlatformLookAndFeelClassName());
    } catch(Exception e) {};                     // sonst verwende default L&F

    JFrame frame = new JFrame("Hello");          // FensterObjekt erzeugen
                                                 // Instanz der Klasse Hello
                                                 // erzeugen und hinzufuegen
    frame.getContentPane().add(new Hello(), BorderLayout.CENTER);
    frame.addWindowListener(this);               // DIES Objekt ist fuer Window-
                                                 // Events zustaendig
    frame.pack();                                // anzeigbar machen und
                                                 // Fenstergroesse berechnen
    frame.setVisible(true);                      // Fenster sichtbar machen
  }

  /** Die folgenden Methoden gehoeren zum Interface WindowListener.
   *  Der Rumpf bleibt bei allen Methoden (bis auf windowClosing) leer. */
  public void windowActivated(WindowEvent e) { }
  public void windowClosed(WindowEvent e) { }
  public void windowDeactivated(WindowEvent e) { }
  public void windowDeiconified(WindowEvent e) { }
  public void windowIconified(WindowEvent e) { }
  public void windowOpened(WindowEvent e) { }
  /**
   * Sorgt dafuer, dass die Applikation beendet wird, wenn die entsprechende
   * Schaltflaeche im Rahmen des Fensters gedrueckt wurde.
   * @param e der ausgeloeste Event
   */
  public void windowClosing(WindowEvent e) {
    System.exit(0);                              // Programm sofort beenden
  }

  public static void main(String args[]) {
    new HelloApp();                              // Instanz erzeugen
  }
}
```

2.8 Java-Applet

Die Trennung zwischen Darstellung des Fensters und der Verwaltung/Darstellung des Fensterinhaltes in zwei Klassen bietet die Möglichkeit den Darstellungsrahmen zu verändern, z.B. indem die Klasse `HelloApp` durch eine dritte Klasse `HelloApplet` ersetzt wird. Diese erzeugt kein Fenster (`JFrame`) sondern ein `JApplet`, das in HTML-Dokumente eingebunden werden kann und wieder den Rahmen für die eigentlichen GUI-Elemente bildet:

```
package HelloWorld;

import java.awt.BorderLayout;                    // Importliste aller aus
import javax.swing.UIManager;                    // AWT u. Swing-Komponenten
import javax.swing.JApplet;                      // benoetigten Klassen

public class HelloApplet extends JApplet {
  /** Diese Methode wird vom Broswer beim Start des Applets aufgerufen */
  public void init() {
    try {                                        // versuche Look & Feel so zu
      UIManager.setLookAndFeel(                  // setzen, dass es auf allen
                                                 // Systemen gleich aussieht
        UIManager.getCrossPlatformLookAndFeelClassName());
    } catch(Exception e) {};                     // sonst verwende System L&F
                                                 // Instanz der Klasse Hello
                                                 // erzeugen und einfuegen
    getContentPane().add(new Hello(), BorderLayout.CENTER);
  }
}
```

Beim Start des Applets wird die Methode `init` aufgerufen, in der zunächst wieder versucht wird, das typische Java Look-And-Feel einzustellen. Anschließend wird eine Instanz der Klasse `Hello` zum GUI-Bereich des Applets hinzugefügt. Da die Größe des Applets im zugehörigen HTML-Dokument festgelegt und die Sichtbarkeit vom HTML-Betrachtungsprogramm geregelt wird sind keine weiteren Angaben erforderlich. Es muß kein WindowListener implementiert werden, da das Applet kein Fenster ist und ihm die entsprechenden Schaltflächen fehlen, wie im folgenden Beispiel zu sehen:

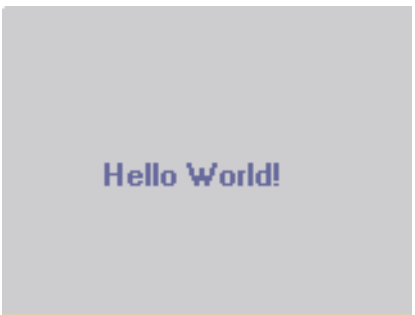


Abbildung 2.5: Screenshot des Hello-Applets

Kapitel 3

2D-Grundlagen

3.1 Koordinatensysteme

Die Angabe eines Punktes geschieht meistens durch kartesische Koordinaten x, y.

Eine Folge von Punkten kann absolut oder relativ spezifiziert werden:

Absolut: Jeder Punkt der Folge wird durch seine kartesischen Koordinaten beschrieben.

Relativ: Jeder Punkt der Folge wird unter Verwendung einer Windrose (Abbildung 3.1) relativ zum Vorgänger der Folge beschrieben, entweder mit absoluten Richtungscodes oder mit relativen Richtungscodes.

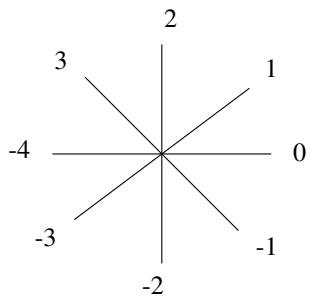


Abbildung 3.1: Windrose

Eine Verwendung von absoluten Richtungscodes ergibt für die Figur in Abbildung 3.2 die Folge $0, 2, 1, 2, 2, 0, -2, -2, -1, -2$. Der relative Richtungscode legt nach jedem Schritt die momentane Richtung als "0" fest. Es ergibt sich für die Figur in Abbildung 3.2 die Folge $0, 2, -1, 1, 0, -2, -2, 0, 1, -1$.

Zur Platzeinsparung werden die "wahrscheinlicheren" Richtungsänderungen mit weniger Bits codiert. Tabelle 3.1 zeigt eine mögliche Codierung, basierend auf den Wahrscheinlichkeiten in Spalte 1. Der zu diesen Wahrscheinlichkeiten konstruierte Huffman-Code wird mit Hilfe des Baumes in Abbildung 3.3 ermittelt. Für die Figur in Abbildung 3.2 entstehen dann statt $(10 \times 3) = 30$ Bits nur noch 26 Bits.

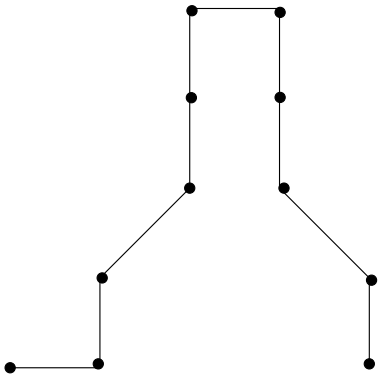


Abbildung 3.2: Beispiel für Streckenzug

%	Richtung	Code	Bit-Länge
28	0	00	2
26	1	01	2
24	-1	10	2
7	2	1100	4
6	-2	1101	4
4	3	1110	4
3	-3	11100	5
2	-4	11111	5

Tabelle 3.1: Relative Richtungscodes

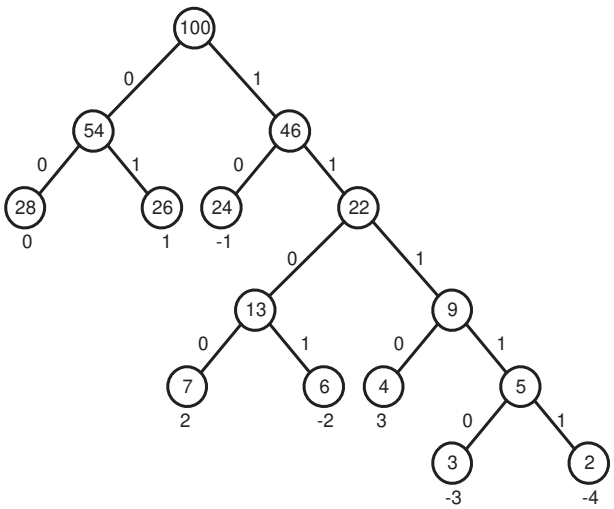


Abbildung 3.3: Code-Baum basierend auf Wahrscheinlichkeiten

3.2 Linie

- Gegeben sind Anfangs- und Endkoordinaten einer Linie.
- Zu berechnen sind die "anzuschaltenden" Pixel.

Eine erste, offensichtliche Möglichkeit verwendet die Geradengleichung $y = s \cdot x + c$:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow$$

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x + \frac{y_1 \cdot x_2 - y_2 \cdot x_1}{x_2 - x_1}$$

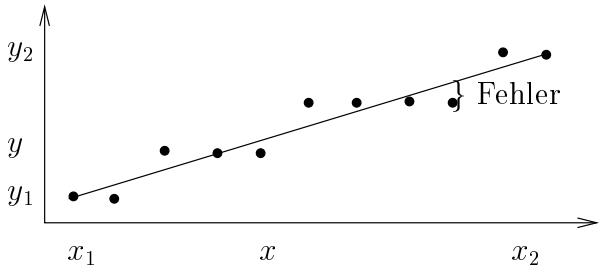


Abbildung 3.4: Fehler als Abweichung von der Ideal-Linie

Der resultierende Fehler pro Position (Abweichung des errechneten Punktes von der Ideal-Linie) wird in Abbildung 3.4 ersichtlich.

Unter Verwendung einer Klasse *Point* mit den Integer-Koordinaten `x` und `y` entsteht:

```
void plot_line(Point P, Point q)
{
        double s, c;
        Point p = new Point(P);

        s = (double) (q.y-p.y) / (double) (q.x-p.x);
        c = (double) (p.y*q.x - q.y*p.x) / (double) (q.x - p.x );

        while (p.x <= q.x) {
                p.y = (int)(s*p.x + c + 0.5);
                set_pixel(p);
                p.x++;
        }
}
```

Das Verfahren hat zwei Nachteile:

1. Pixel für steile Geraden sind nicht benachbart.
2. Es wird viel Gleitkomma-Arithmetik verursacht.

Als Lösung bietet sich der Bresenham-Algorithmus an, der den jeweils nächsten y-Wert aus dem vorherigen berechnet und dabei den momentanen Fehler nachhält.

Zunächst betrachten wir Geraden im 1. Oktanten (d.h. Steigung < 1):

```
    void bresenham_linie_1(Point P, Point q)
    {
            int dx, dy;
            double s, e;
            Point p = new Point(P);

            dx    = q.x - p.x;
            dy    = q.y - p.y;
            e     = 0.0;
            s     = (double) dy / (double) dx;

            while (p.x <= q.x) {
                    set_pixel(p);
                    p.x++;
                    e += s;
                    if (e > 0.5) { p.y++; e-- ; }
            }
    }
```

Eliminiere Gleitkommazahlen durch Multiplikation von `s` mit `2*dx`:

```
void bresenham_linie_2(Point P, Point q)
    {
            int dx, dy, error, delta;
            Point p = new Point(P);

            dx    = q.x - p.x;
            dy    = q.y - p.y;
            error = 0;
            delta = 2*dy;

            while (p.x <= q.x) {
                    set_pixel(p);
                    p.x++;
                    error += delta;
                    if (error > dx) { p.y++; error -= 2*dx; }

            }
    }
```

Vergleiche `error` mit 0 und verwende Abkürzung `schwelle` für `-2*dx`:

```
void bresenham_linie_3(Point P, Point q)
    {
            int dx, dy, error, delta, schwelle;
            Point p = new Point(P);

            dx       = q.x - p.x;
            dy       = q.y - p.y;
            error    = -dx;
            delta    = 2*dy;
            schwelle = -2*dx;

            while (p.x <= q.x) {
                    set_pixel(p);
                    p.x++;
                    error += delta;
                    if (error > 0) { p.y++; error += schwelle; }
            }
    }
```

Geraden in den anderen 7 Oktanten müssen durch Spiegelung und/oder Vertauschen von x und y auf den 1. Oktanten zurückgeführt werden (siehe folgendes Listing).

Abbildung 3.5: Vom Bresenham-Algorithmus erzeugte Linien

```
/*****************************************************************************/
/*                                                                           */
/*                  Bresenham-Algorithmus zum Zeichnen einer Linie           */
/*                                                                           */
/*****************************************************************************/

void bresenham_linie(Point P, Point q)                  // zeichnet Linie von P nach q
{
        Point p = new Point(P);
        int error, delta, schwelle, dx, dy, inc_x, inc_y;

        dx = q.x - p.x;
        dy = q.y - p.y;

        if (dx>0) inc_x= 1; else inc_x=-1;
        if (dy>0) inc_y= 1; else inc_y=-1;

        if (Math.abs(dy) < Math.abs(dx)) {  // flach nach oben oder flach nach unten

                error = -Math.abs(dx);
                delta = 2*Math.abs(dy);
                schwelle = 2*error;
                while (p.x != q.x) {
                        set_pixel(p);
                        p.x+=inc_x;
                        error = error + delta;
                        if (error >0) { p.y+=inc_y; error = error + schwelle;}
                }
        }

        else                                // steil nach oben oder steil nach unten

        {

                error = -Math.abs(dy);
                delta = 2*Math.abs(dx);
                schwelle = 2*error;
                while (p.y != q.y) {
                        set_pixel(p);
                        p.y+=inc_y;
                        error = error + delta;
                        if (error >0) { p.x+=inc_x; error = error + schwelle;}
                }
        }

        set_pixel(q);

}
```

Bresenham-Algorithmus

3.2.1 Antialiasing

Bei gleichbleibender Auflösung (d.h. Pixel pro Zeile/Spalte) kann bei Schirmen mit mehreren Grauwerten pro Pixel die Qualität der Linie gesteigert werden. Hierzu werden die Pixel proportional zur Überlappung mit der Ideallinie geschwärzt.

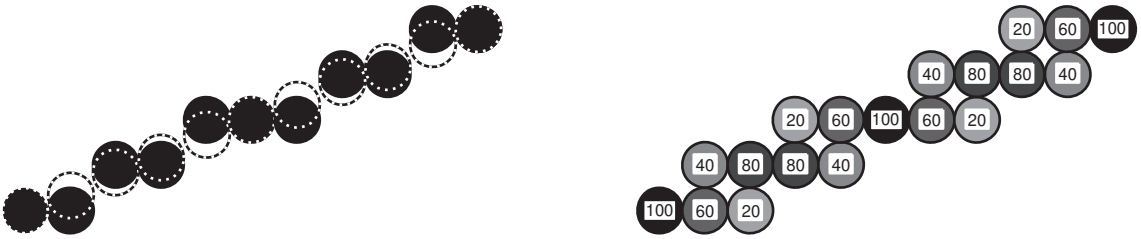


Abbildung 3.6: (a) Bresenham-Linie und Ideal-Linie (b) Resultierende Grauwerte

In Abbildung 3.6 liegt das zweite vom Bresenham-Algorithmus gesetzte Pixel unterhalb der Ideallinie und hat eine Überlappung mit der Ideallinie von 60 %. Daher wird das Bresenham-Pixel mit einem 60 % - Grauwert eingefärbt und das Pixel darüber mit einem 40 % - Grauwert. Das Auge integriert die verschiedenen Helligkeitswerte zu einer saubereren Linie als die reine Treppenform von schwarzen Pixeln.

Eine diagonale Linie verwendet dieselbe Anzahl von Pixeln wie eine horizontale Linie für eine bis zu $\sqrt{2}$mal so lange Strecke. Daher erscheinen horizontale und vertikale Linien kräftiger als diagonale. Dies kann durch Antialiasing-Techniken behoben werden.

3.3 Polygon

Ein Polygon wird spezifiziert durch eine Folge von Punkten, die jeweils durch Linien verbunden sind. Anfangs- und Endpunkt sind identisch.

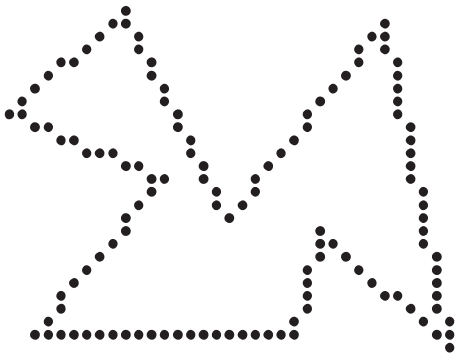


Abbildung 3.7: Polygon

3.4 Kreis

Problem: Gegeben Mittelpunkt (x, y) und Radius r. Bestimme die "anzuschaltenden" Pixel für einen Kreis mit Radius r um den Punkt (x, y).

Betrachte zunächst den Verlauf eines Kreises um $(0, 0)$ im 2. Oktanten (Abbildung 3.8).
Für einen Punkt (x, y) sei $F(x, y) = x^2 + y^2 - r^2$

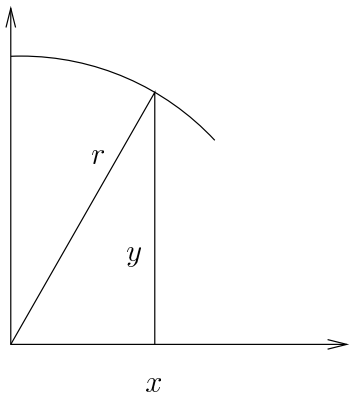


Abbildung 3.8: Verlauf des Kreises im 2. Oktanden

Es gilt:

$$\begin{aligned} F(x,y) &= 0 \text{ für } (x,y) \text{ auf dem Kreis,} \\ F(x,y) &< 0 \text{ für } (x,y) \text{ innerhalb des Kreises.} \\ F(x,y) &> 0 \text{ für } (x,y) \text{ außerhalb des Kreises,} \end{aligned}$$

Verwende F als Entscheidungsvariable dafür, ob y erniedrigt werden muß, wenn x erhöht wird. F wird angewendet auf die Mitte M zwischen Zeile y und $y-1$ (siehe Abbildung 3.9).

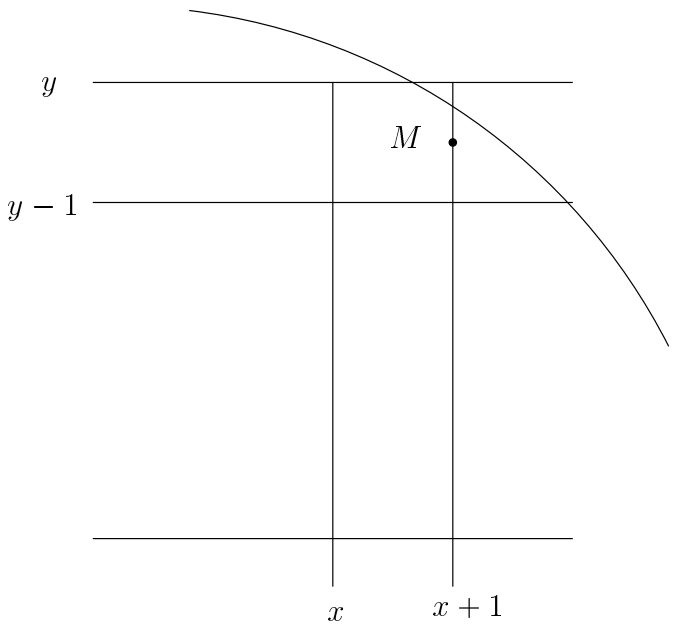


Abbildung 3.9: Testpunkt M für Entscheidungsvariable

$\Delta = F(x+1, y-\frac{1}{2})$

Falls $\Delta < 0 \Rightarrow M$ liegt innerhalb $\Rightarrow (x+1, y)$ ist ideal
$\Delta \geq 0 \Rightarrow M$ liegt außerhalb $\Rightarrow (x+1, y-1)$ ist ideal

Idee: Entscheide anhand von Δ, ob y erniedrigt werden muß oder nicht, und rechne neues Δ aus.

$$
\begin{aligned}
\text{Sei "altes" } \Delta &= F(x+1, y-\tfrac{1}{2}) &&= (x+1)^2 + (y-\frac{1}{2})^2 - r^2 \text{ gegeben.} \\
\text{falls } \Delta &< 0 \Rightarrow \\
\text{"neues" } \Delta' &= F(x+2, y-\tfrac{1}{2}) &&= (x+2)^2 + (y-\frac{1}{2})^2 - r^2 = \Delta + 2x + 3 \\
\text{falls } \Delta &\geq 0 \Rightarrow \\
\text{"neues" } \Delta' &= F(x+2, y-\tfrac{3}{2}) &&= (x+2)^2 + (y-\frac{3}{2})^2 - r^2 = \Delta + 2x - 2y + 5 \\
\text{Startwert für } \Delta &= F(1, r-\tfrac{1}{2}) &&= 1^2 + (r-\frac{1}{2})^2 - r^2 = \frac{5}{4} - r
\end{aligned}
$$

Also ergibt sich:

```
void bresenham_kreis_1 (            // zeichnet Kreis um Punkt 0,0
                        int r)      // mit Radius r
{
        double delta;
        int x, y;

        x=0; y=r;
        delta = 5.0/4.0 - r;

        while (y>=x) {

                set_pixel (new Point(x,y));

                if (delta < 0.0 ) { delta += 2*x + 3.0;       x++;      }
                             else { delta += 2*x - 2*y + 5.0; x++; y--; }
        }
}
```

Substituiere `delta` durch `d := delta - 1/4`. Dann ergibt sich
als neue Startbedingung: `d := 5/4 - r - 1/4 = 1 - r`
als neue if-Bedingung: `if (d < 0)`
Da `d` nur ganzzahlige Werte annimmt, reicht der Vergleich mit 0.

Weitere Verbesserung:
Ersetze `2x + 3` durch `dx` mit Initialwert `dx = 3;`
Ersetze `2x - 2y + 5` durch `dxy` mit Initialwert `dxy = -2*r + 5`
Es ergibt sich:

```
void bresenham_kreis_2 (            // zeichnet Kreis um Punkt 0,0
                        int r)      // mit Radius r
{
        int x, y, d, dx, dxy;

        x=0; y=r; d=1-r;
        dx=3; dxy=-2*r+5;
        while (y>=x) {

                set_pixel (new Point(x,y));

                if (d < 0) { d += dx;  dx += 2; dxy += 2; x++;      }
                      else { d += dxy; dx += 2; dxy += 4; x++; y--; }
        }
}
```

Um den ganzen Kreis zu zeichnen, wird die Symmetrie zum Mittelpunkt ausgenutzt.

Die Anzahl der erzeugten Punkte des Bresenham-Algorithmus für den vollen Kreis beträgt $4 \cdot \sqrt{2} \cdot r$ Punkte. Verglichen mit dem Kreisumfang von $2 \cdot \pi \cdot r$ liegt dieser Wert um 10% zu

tief.

```
/*****************************************************************************/
/*                                                                           */
/*                  Bresenham-Algorithmus zum Zeichnen eines Kreises         */
/*                                                                           */
/*****************************************************************************/

private void bresenham_kreis (                // zeichnet mit Bresenham-Algorithmus
        Point p,                              // einen Kreis um den Punkt p
        int r)                                // mit Radius r
{
        int x,y,d,dx,dxy;
        x=0; y=r; d=1-r;
        dx=3; dxy=-2*r+5;
        while (y>=x)
        {
                set_pixel( new Point( p.x+x, p.y+y) );  // alle 8 Oktanden werden
                set_pixel( new Point( p.x+y, p.y+x) );  // gleichzeitig gezeichnet
                set_pixel( new Point( p.x+y, p.y-x) );
                set_pixel( new Point( p.x+x, p.y-y) );
                set_pixel( new Point( p.x-x, p.y-y) );
                set_pixel( new Point( p.x-y, p.y-x) );
                set_pixel( new Point( p.x-y, p.y+x) );
                set_pixel( new Point( p.x-x, p.y+y) );

                if (d<0) { d=d+dx;  dx=dx+2; dxy=dxy+2; x++;      }
                    else { d=d+dxy; dx=dx+2; dxy=dxy+4; x++; y--; }
        }
}
```

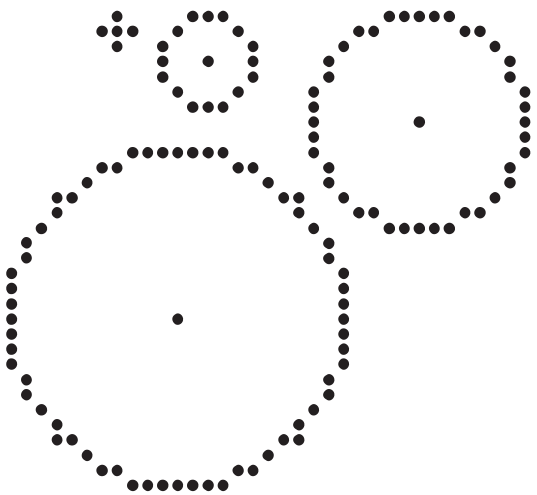


Abbildung 3.10: Vom Bresenham-Algorithmus erzeugte Kreise

Kapitel 4

2D-Füllen

Zum Füllen eines Objekts mit einer einzigen Farbe oder mit einem Muster bieten sich zwei Ansätze an:

- Universelle Verfahren, die die Zusammenhangseigenschaften der Pixel im Inneren der Objekte ausnutzen.
- Scan-Line-Verfahren, die eine geometrische Beschreibung der Begrenzungskurven voraussetzen.

4.1 Universelle Füll-Verfahren

Universelle Füllverfahren stützen sich auf die Nachbarschaft eines Pixels. Abbildung 4.1 zeigt zwei Varianten.

Nachbarn zu • im 4-way-stepping Nachbarn zu • im 8-way-stepping

Abbildung 4.1: Nachbarschaften bei universellen Füllverfahren

Ausgehend vom Startpunkt (x, y) werden so lange die 4-way-stepping-Nachbarn gefärbt, bis die Umgrenzung erreicht ist.

Vorteil: beliebige Umrandung möglich

Nachteil: hoher Rechen- und Speicherbedarf

Obacht:

Gebiete, die nur durch 8-way-stepping erreicht werden können, werden beim Füllen mit 4-way-stepping "vergessen", wird hingegen die Nachbarschaft über 8-way-stepping definiert, so "läuft die Farbe aus".

Bild 4.2 zeigt beide Effekte.

Unerreichtes Gebiet beim 4-way-stepping

Farbauslauf beim 8-way-stepping

Abbildung 4.2: Probleme bei universellen Füllverfahren

Benötigt werden

```
boolean get_pixel (            // liefert true, wenn Pixel p
                   Point p)    // die Vordergrundfarbe hat
```

und

```
boolean range_ok (             // liefert false, wenn Pixel p
                  Point p)     // ausserhalb des Bildbereichs
```

Der Nachteil der sehr ineffizienten Methode `boundary_fill` liegt darin, daß für jedes Pixel innerhalb der Begrenzungskurve(n) (mit Ausnahme der Randpixel des inneren Gebiets) der Algorithmus viermal aufgerufen wird. Dadurch werden die Pixel mehrfach auf dem Stapel abgelegt.

Eine Beschleunigung des Verfahrens läßt sich dadurch erreichen, daß auf dem Stapel jeweils Repräsentanten für noch zu füllende Zeilen abgelegt werden, d.h. nach dem Einfärben einer kompletten horizontalen Linie werden von den unmittelbar angrenzenden Zeilen solche Punkte auf den Stapel gelegt, die noch nicht gefüllt worden sind und die unmittelbar links von einer Begrenzung liegen.

```
/*****************************************************************************/
/*                                                                           */
/*                  Fuellen einer durch Vordergrundfarbe umrandeten Flaeche  */
/*                                                                           */
/*****************************************************************************/

private void boundary_fill(             // setzt alle Nicht-Vordergrund-Pixel
                           Point p)     // beginnend bei Position p auf Vordergrund
{
        if ( range_ok(p) && !get_pixel(p) ) {    // falls p keine Vordergrundfarbe hat

                set_pixel(p);                    // setze Vordergrundfarbe

                boundary_fill( new Point(p.x+1, p.y   ));  // 4-way stepping
                boundary_fill( new Point(p.x,   p.y+1 ));
                boundary_fill( new Point(p.x-1, p.y   ));
                boundary_fill( new Point(p.x,   p.y-1 ));

        }
}




/*****************************************************************************/
/*                                                                           */
/*                  Leeren einer durch Vordergrundfarbe definierten Flaeche  */
/*                                                                           */
/*****************************************************************************/

private void boundary_empty(            // setzt alle Vordergrund-Pixel beginnend
                            Point p)    // bei Position p auf Hintergrundfarbe
{
        if ( range_ok(p) && get_pixel(p) ) {    // falls p Vordergrundfarbe hat

                del_pixel(p);                   // setze Hintergrundfarbe

                boundary_empty( new Point( p.x+1, p.y   ));  // 8-way-stepping
                boundary_empty( new Point( p.x+1, p.y+1 ));
                boundary_empty( new Point( p.x,   p.y+1 ));
                boundary_empty( new Point( p.x-1, p.y+1 ));
                boundary_empty( new Point( p.x-1, p.y   ));
                boundary_empty( new Point( p.x-1, p.y-1 ));
                boundary_empty( new Point( p.x,   p.y-1 ));
                boundary_empty( new Point( p.x+1, p.y-1 ));

        }
}
```

```
/*************************************************************************/
/*                                                                       */
/*   linienweises Fuellen einer durch Vordergrundfarbe umrandeten Flaeche    */
/*                                                                       */
/*************************************************************************/

  private void fillRowByRow(int x, int y, Graphics g) {
    int lg;                                     // nicht gesetzte Pixel ganz
    int rg;                                     // links/rechts in dieser Z.
    Punkt hilf;                                 // Hilfpunkt
    int px = x;                                 // lokale Kopie

    while(!isPixelSet(x, y)) {                  // Solange Pixel ungesetzt
      setPixelInBuf(x, y);                      // Pixel merken und setzen
      hilf = new Punkt(x, y);
      hilf.paint(g);
      x--;                                      // naechstes Pixel links
    }
    lg = x+1;                                   // 1 zu weit gelaufen

    x = px + 1;                                 // da (px,y) schon gesetzt

    while(!isPixelSet(x, y)) {                  // Solange Pixel ungesetzt
      setPixelInBuf(x, y);                      // Pixel merken und setzen
      hilf = new Punkt(x, y);
      hilf.paint(g);
      x++;                                      // naechstes Pixel rechts
    }
    rg = x-1;                                   // 1 zu weit gelaufen

    for(int pos = rg; pos >= lg; pos--) {       // von rechts nach links
      if(!isPixelSet(pos, y - 1)) {             // falls Pixel in Reihe ueber
                                                // dieser nicht gesetzt:
        fillRowByRow(pos,y-1, g);               // Repraesentant! neuer Aufruf
      }
      if(!isPixelSet(pos, y + 1)) {             // falls Pixel in Reihe unter
                                                // dieser nicht gesetzt:
        fillRowByRow(pos,y+1, g);               // Repraesentant! neuer Aufruf
      }
    }
    return;
  }
```

4.2 Scan-Line-Verfahren für Polygone

Idee: Bewege eine waagerechte Scan-Line schrittweise von oben nach unten über das Polygon, und berechne die Schnittpunkte der Scan-Line mit dem Polygon.

1. Sortiere alle Kanten nach ihrem größten y-Wert.
2. Bewege die Scan-Line vom größten y-Wert bis zum kleinsten y-Wert.
3. Für jede Position der Scan-Line
   - wird die Liste der aktiven Polygonkanten ermittelt,
   - werden die Schnittpunkte berechnet und nach x-Werten sortiert,
   - werden jene Scan-Line-Segmente, die im Inneren des Polygons liegen, angezeigt.

Abbildung 4.3 zeigt eine Scanline beim Durchqueren eines Polygons. Die Sortierung der Kanten nach ihrem größten y-Wert ergibt die Folge $ABCDEFGHIJ$. Die zur Zeit aktiven Kanten sind $BEFD$. Die sortierten x-Werte der Schnittpunkte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ergeben die zu zeichnenden Segmente $(x_1, x_2), (x_3, x_4), \ldots$

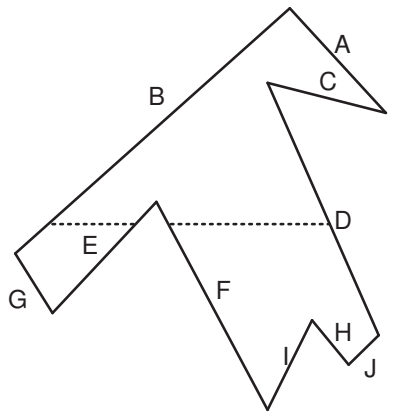


Abbildung 4.3: Polygon mit Scanline

Die Sortierung der Kanten nach ihren größten y-Werten ermöglicht den einfachen Aufbau und die effiziente Aktualisierung einer Liste von aktiven Kanten. Eine Kante wird in diese Liste aufgenommen, wenn der Endpunkt mit dem größeren y-Wert von der Scan-Line überstrichen wird, und wird wieder entfernt, wenn die Scan-Line den anderen Endpunkt überstreicht.

Allgemein gilt, daß ein Punkt genau dann im Inneren des Polygons liegt, wenn ein von ihm ausgehender Halbstrahl die Polygonkanten ungeradzahlig oft schneidet.

Horizontale Kanten werden nicht in die Kantenliste aufgenommen. Für sie wird eine Linie gezeichnet.

Trifft die Scan-Line auf einen Polygoneckpunkt, dessen Kanten beide oberhalb oder beide unterhalb liegen, so zählt der Schnittpunkt doppelt. Trifft die Scan-Line auf einen Polygoneckpunkt, dessen Kanten oberhalb und unterhalb liegen, so zählt der Schnittpunkt nur einfach (siehe Abbildung 4.4).

Dadurch wird sichergestellt, daß die Paare $(x_1, x_2), (x_3, x_4), \ldots$ der sortierten x-Werte der Schnittpunkte die zu zeichnenden Segmente im Inneren korrekt darstellen.

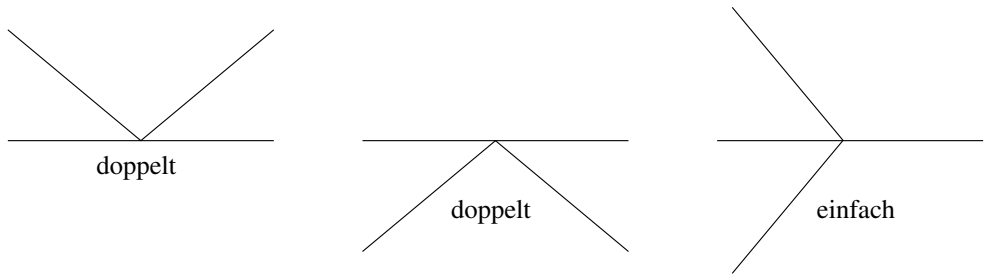


Abbildung 4.4: Fallunterscheidungen beim Berechnen der Schnittpunkte

Kohärenz-Eigenschaft

Abbildung 4.5 zeigt, wie die Schnittpunkte für Scan-Line y_{i+1} sich mit Hilfe der Schnittpunkte von Scan-Line y_i bestimmen lassen.

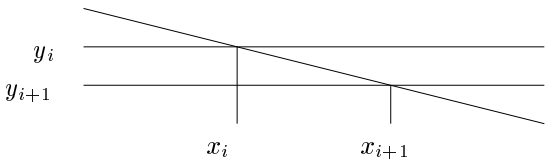


Abbildung 4.5: Fortschreiben der errechneten Schnittpunkte

Es gilt: Die Steigung der Geraden lautet $s = (y_i - y_{i+1})/(x_i - x_{i+1})$.
Wegen $y_i - y_{i+1} = 1$ ergibt sich $x_{i+1} = x_i - 1/s$.

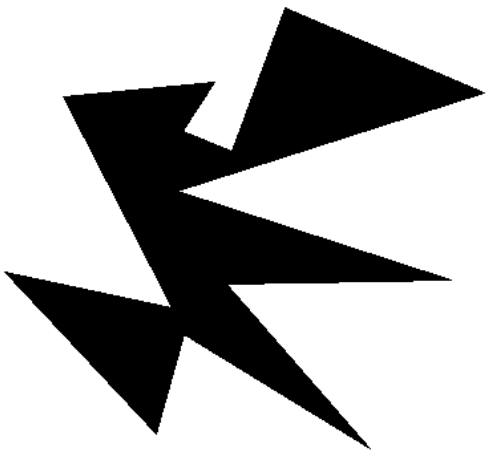


Abbildung 4.6: Vom Scanline-Algorithmus gefülltes Polygon

In der folgenden Methode `scan_line_fill` wird als Datenstruktur für die Liste der Polygonkanten die Klasse `Edge` verwendet.

```
/** Klasse zur Implementation einer verzeigerten Kantenliste. */

public class Edge {

        /** groesste y-Koordinate der Kante. */
        public int      y_top;

        /** Schnittpunkt der Scan-Line mit der Kante. */
        public double   x_int;

        /** y-Ausdehnung der Kante. */
        public int      delta_y;

        /** inverse Steigung 1/s der Kante. */
        public double   delta_x;

        /** naechste Kante in der Kantenliste. */
        public Edge     next;

        /** Erzeugt ein Objekt vom Typ Kante mit den uebergebenen Parametern.
          * next ist die naechste Kante in der Liste.                          */

        public Edge(    int     y_top,
                        double  x_int,
                        int     delta_y,
                        double  delta_x,
                        Edge    next) {

                this.y_top    = y_top;
                this.x_int    = x_int;
                this.delta_y  = delta_y;
                this.delta_x  = delta_x;
                this.next     = next;
        }

        /** Erzeugt ein Objekt vom Typ Kante mit den uebergebenen Parametern. */

        public Edge(    int     y_top,
                        double  x_int,
                        int     delta_y,
                        double  delta_x) {

                this(y_top, x_int, delta_y, delta_x, null);
        }

        /** Erzeugt ein leeres Objekt vom Typ Kante. */

        public Edge() {

                this(0, 0.0, 0, 0.0, null);
        }
}
```

```
/*****************************************************************************/
/*                                                                           */
/*                  fuellt mit dem Scan-Line-Algorithmus das Innere eines Polygons   */
/*                                                                           */
/*****************************************************************************/

private        void Insert(                    /* fuegt in die Liste eine Kante ein */
        Edge edges,                            /* Beginn der Kantenliste            */
        Point P1, Point p2,                    /* einzufuegende Kante (P1,P2)       */
        int y_next)                            /* Behandlung von Sonderfaellen:     */
                                               /* siehe Prozedur Next_y             */
{
        int max_y, dy;
        double x2, dx, max_x;

        Point P2 = new Point(p2);

        dx=(double)(P2.x-P1.x)/(double)(P2.y-P1.y);
        x2=(double) P2.x;

        if ((P2.y > P1.y) && (P2.y < y_next)) { P2.y--; x2=x2-dx; }   // Sonderfaelle
        if ((P2.y < P1.y) && (P2.y > y_next)) { P2.y++; x2=x2+dx; }

        dy=P2.y-P1.y;
        if (dy>0) { max_y = P2.y;
                    max_x = (double)x2;
                    dy++;
        } else    { max_y=P1.y;
                    max_x=(double)P1.x;
                    dy=1-dy;
        }

        Edge edge1 = edges;                                           // Hilfsobjekt

        while (edge1.next.y_top >= max_y) edge1 = edge1.next;

        Edge newedge = new Edge(max_y, max_x, dy, dx, edge1.next);    // einfuegen
                                                                      // sortiert nach
        edge1.next = newedge;                                         // max_y
}
```

```
private int Next_y(    /* liefert den y-Wert des naechsten Knoten laengs der Grenze */
                       /* dessen y-Koordinate verschieden ist von P[k].y            */
        int k,                                      /* Index des Punktes           */
        Point[] Points,                             /* Liste von Punkten           */
        int n)                                      /* Anzahl der Punkte           */
{
        int compare_y, new_y;

        compare_y = Points[k].y;

        do {
                k = (k+1)%n;
                new_y = Points[k].y;
        } while (new_y == compare_y);

        return(new_y);
}

private int Edge_Sort(                      /* erzeugt nach y sortierte Kantenliste */
                                            /* und liefert den kleinsten y-Wert     */
        int n,                              /* Anzahl der Punkte                    */
        Point[] P,                          /* Punkteliste                          */
        Edge edges)                         /* Kantenliste                          */
{
        int bottom_y;
        Point P1;

        Edge edge1 = new Edge();

        edges.next=edge1;
        edge1.next=null;

        edges.y_top=Integer.MAX_VALUE;
        edge1.y_top=-Integer.MAX_VALUE;

        P1 = P[n-1];
        bottom_y = P1.y;

        for (int k=0; k<n; k++) {
                if (P1.y != P[k].y) Insert(edges,P1,P[k],Next_y(k,P,n));
                        else set_dither_line(P1,P[k].x);
                if (P[k].y < bottom_y) bottom_y = P[k].y;
                P1 = P[k];
        }
        return (bottom_y);
}
```

```
private Edge Update_List_Ptr(              /* aktualisiert den Zeiger auf die letzte */
                                           /* aktive Kante und gibt ihn zurueck      */
                                           /* wegen Dekrementieren der Scan-Line     */
                                           /* werden einige Kanten aktiv             */
        int scan,
        Edge l_act_edge)
{
        while (l_act_edge.next.y_top >= scan) l_act_edge=l_act_edge.next;

        return(l_act_edge);
}


private       Edge Sort_Intersections (    /* sortiert die aktive Kantenliste       */
        Edge edges,                        /* Beginn der Kantenliste                */
        Edge l_act_edge)                   /* Ende der Kantenliste                  */
                                           /* Liefert den ggf. modifizierten Zeiger */
                                           /* auf die letzte aktive Kante zurueck   */
{
        Edge edge1, edge2, edge3;

        edge2 = edges.next;

        do {
                edge1=edges;
                while (edge1.next.x_int < edge2.next.x_int)
                        edge1=edge1.next;
                if (edge1 != edge2) {             // tausche edge1.next und edge2.next
                        edge3           = edge2.next.next;
                        edge2.next.next = edge1.next;
                        edge1.next      = edge2.next;
                        edge2.next      = edge3;
                        if (edge1.next==l_act_edge) l_act_edge=edge2;
                } else edge2 = edge2.next;

        } while (edge2 != l_act_edge);

        return (l_act_edge);
}
```

```
private void Fill(                      /* generiert fuer je zwei Schnittpunkte   */
                                        /* aus der Kantenliste den Zeichne-Aufruf */
        Edge edges,                     /* Beginn der aktuellen Kantenliste       */
        Edge l_act_edge,                /* Ende der aktuellen Kantenliste         */
        int scan)                       /* Scanline                               */
{
        Point Q = new Point();

        do {
                edges = edges.next;
                Q.x = (int) (edges.x_int+0.5);
                Q.y = scan;
                edges = edges.next;
                set_dither_line(Q,(int)(edges.x_int+0.5) );

        } while (edges != l_act_edge);
}

private        Edge Update_Edges(/* aktual. die aktiven Kanten in der Kantenliste   */
        Edge edges,              /* beginnend bei edges                             */
        Edge l_act_edge)         /* und endend bei l_act_edge                       */
                                 /* Kanten mit delta_y=0 werden entfernt. Der ggf.  */
                                 /* modifizierte Zeiger auf die letzte aktive Kante */
                                 /* wird zurueckgegeben                             */
{
        Edge prev_edge;

        prev_edge = edges;

        do {
                edges = prev_edge.next;
                if (edges.delta_y > 1) {
                        edges.delta_y--;
                        edges.x_int = edges.x_int - edges.delta_x;
                        prev_edge = edges;
                } else
                {
                        prev_edge.next = edges.next;
                        if (edges == l_act_edge) l_act_edge = prev_edge;
                        edges = null;        /* dispose edges */
                } /* if */
        } while (prev_edge != l_act_edge);
        return (l_act_edge);
}
```

```
private void scan_line_fill(                    /* Fuellt das Innere eines Polygons */
        int NumPoints,                          /* Anzahl der Punkte                */
        Point[] Points)                         /* Liste von Punkten                */
{
        Edge l_act_edge;
        int scan, bottom_y;

        Edge edges = new Edge();

        bottom_y = Edge_Sort(NumPoints, Points, edges);

        l_act_edge = edges.next;

        for (scan = edges.next.y_top; scan >= bottom_y; scan--) {
                l_act_edge = Update_List_Ptr(scan, l_act_edge);
                l_act_edge = Sort_Intersections(edges, l_act_edge);
                Fill (edges, l_act_edge, scan);
                l_act_edge = Update_Edges(edges, l_act_edge);
        }

        /* dispose dummies edges.next und edges */
        edges.next = null;
        edges = null;
}
```

4.3 Dithering

Eine $n \times n$-Dithermatrix M ist mit den n^2 Zahlen zwischen 0 und $n^2 - 1$ besetzt. Zum Färben einer Fläche mit Grauwert $k, 0 \leq k \leq n^2$ werden alle Pixel (i, j) gesetzt mit $M[i \mod n, j \mod n] < k$. Abbildung 4.7 zeigt das Füllmuster zum Schwellwert 7.

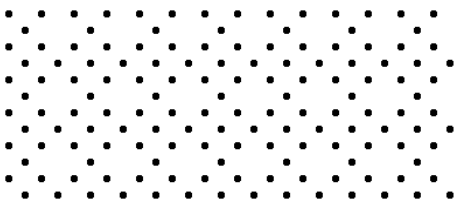


Abbildung 4.7: Zum Schwellwert 7 gehörender Grauwert

```
/*****************************************************************************/
/*                  Definition einer Dithermatrix mit Routinen dafuer          */
/*****************************************************************************/

private static final int DITHER_DIM  = 8;       // 8x8-Dithermatrix

private static final int[][] dit_mat =
{       { 0,32, 8,40, 2,34,10,42},              // 64-elementige Dithermatrix:
        {48,16,56,24,50,18,58,26},              // Bei Grauwert k werden alle
        {12,44, 4,36,14,46, 6,38},              // Pixel i,j auf schwarz
        {60,28,52,20,62,30,54,22},              // gesetzt, fuer die gilt:
        { 3,35,11,43, 1,33, 9,41},              // dit_mat[i%8,j%8] < k
        {51,19,59,27,49,17,57,25},
        {15,47, 7,39,13,45, 5,37},
        {63,31,55,23,61,29,53,21} };

boolean kleiner_schwelle(                       // testet die Dither-Matrix
                         Point p )              // bezueglich des Punktes
{
        int x = p.x; int y = p.y;

        if (x<0) x=DITHER_DIM - (Math.abs(x)%DITHER_DIM);  // falls x negativ
        if (y<0) y=DITHER_DIM - (Math.abs(y)%DITHER_DIM);  // falls y negativ

        return (dit_mat[x%DITHER_DIM][y%DITHER_DIM] < schwelle);
}

int grauwert(                                   // liefert den Grauwert
             int i, int j )                     // an Position i, j
{
  return(dit_mat[i][j]);
}
```

Kapitel 5

Clipping

Ziel: Nur den Teil eines Objekts darstellen, der innerhalb eines Fensters sichtbar ist.

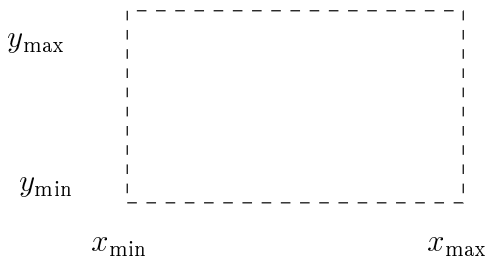


Abbildung 5.1: Clip-Fenster

5.1 Clipping von Linien

Zu einer Menge von Linien sind jeweils neue Anfangs- und Endpunkte zu bestimmen, welche komplett im Clip-Fenster liegen.

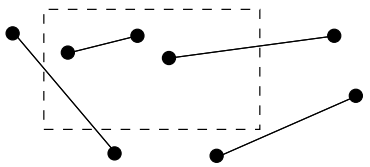


Abbildung 5.2: Ausgangslage beim Linien-Clipping

Idee von Cohen & Sutherland

Teile Ebene anhand des Clip-Fensters in 9 Bereiche ein, beschrieben durch 4-Bit-Bereichscode:

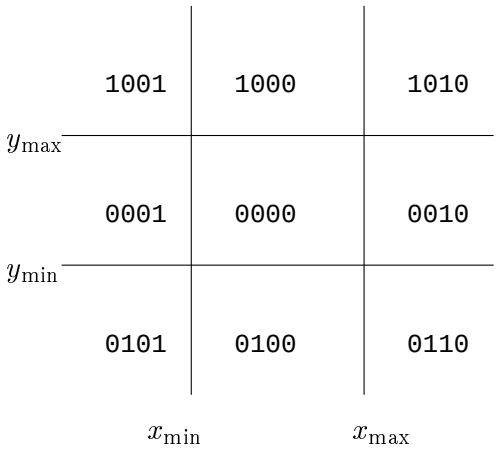


Abbildung 5.3: Bereichscodes nach Cohen & Sutherland

Bit 0: links vom Fenster
Bit 1: rechts vom Fenster
Bit 2: unter dem Fenster
Bit 3: über dem Fenster

Sei $\overline{P_1P_2}$ eine Linie. Dann gilt bei einer bitweisen Verknüpfung:

code (P_1) AND *code* $(P_2) \neq 0 \Rightarrow \overline{P_1P_2}$ komplett außerhalb (beide Punkte auf derselben Seite)

code (P_1) OR *code* $(P_2) = 0 \Rightarrow \overline{P_1P_2}$ komplett innerhalb (beide Punkte im Clip-Fenster)

In den anderen Fällen wird $\overline{P_1P_2}$ mit einer Fensterkante geschnitten und der Test mit der verkürzten Linie erneut ausgeführt.

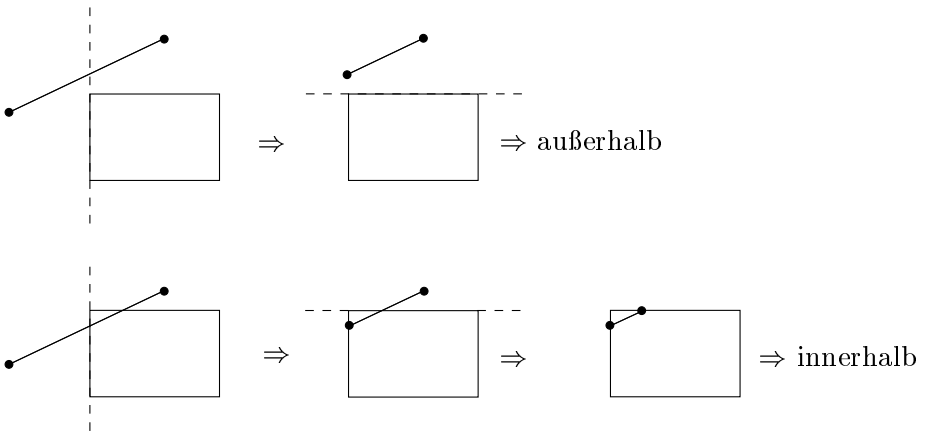


Abbildung 5.4: Möglichkeiten bei zwei außerhalb liegenden Punkten

```
/*****************************************************************************/
/*                                                                           */
/*                Clippen von Linien an einem Fenster nach Cohen-Sutherland  */
/*                                                                           */
/*****************************************************************************/

private static final byte EMPTY  = 0;
private static final byte LEFT   = 1;
private static final byte RIGHT  = 2;          // 4-Bit-Bereichscodes
private static final byte BOTTOM = 4;
private static final byte TOP    = 8;

private int xmin, xmax, ymin, ymax;            // Clip-Fensterraender

private byte region_code(                      // liefert den region-code
                         Point P )             // fuer den Punkt P
{
        byte c;

        c = EMPTY;
        if (P.x < xmin) c = LEFT; else
        if (P.x > xmax) c = RIGHT;
        if (P.y < ymin) c |= BOTTOM; else
        if (P.y > ymax) c |= TOP;
        return(c);
}


private void set_clip_window(         // setzt die Variablen xmin, ymin, xmax, ymax
                Point P,              // anhand des Ursprungs P des Clip-Fensters
                Point delta )         // und anhand seiner Breite/Hoehe delta
        {
                xmin = P.x; xmax = P.x + delta.x;
                ymin = P.y; ymax = P.y + delta.y;
        }


private boolean cohen_sutherland(     // liefert true,
                Point p1, Point p2,   // falls die Gerade p1-p2 sichtbar ist
                Point Q1, Point Q2)   // liefert ggf. sichtbaren Teil Q1-Q2 zurueck
{
        boolean finite_slope;         // true falls Gerade p1-p2 nicht senkrecht laeuft
        double slope = 0.0;           // Steigung der Geraden p1-p2
        byte C, C1, C2;               // 4-Bit-Bereichs-Code
        Point Q = new Point();        // zu berechnender Schnittpunkt mit Gerade

        Point P1 = new Point(p1);     // lokale
        Point P2 = new Point(p2);     // Variablen
        finite_slope = (P1.x != P2.x);
        if (finite_slope) slope = (double)(P2.y-P1.y)/(double)(P2.x-P1.x);
        C1 = region_code(P1);
        C2 = region_code(P2);
```

```
        while ((C1 != EMPTY) || (C2 != EMPTY))  { // mind. ein Endpunkt noch ausserhalb

            if ((C1&C2) != EMPTY) return(false);  // beide auf derselben Seite ausserhalb
            else
            {
                if (C1 == EMPTY) C = C2; else C = C1; // C ist ausserhalb. Berechne
                                                      // einen Schnittpunkt mit den
                                                      // verlaengerten Fensterkanten

                if ((C & LEFT) != EMPTY) {         // schneide mit linker Fenster-Kante
                        Q.x = xmin;
                        Q.y = (int)((Q.x-P1.x)*slope + P1.y);
                        } else

                if ((C & RIGHT) != EMPTY){        // schneide mit rechter Fenster-Kante
                        Q.x = xmax;
                        Q.y = (int)((Q.x-P1.x)*slope + P1.y);
                        } else

                if ((C & BOTTOM) != EMPTY) {      // schneide mit unterer Fenster-Kante
                        Q.y = ymin;
                        if (finite_slope)
                                Q.x = (int)((Q.y-P1.y)/slope + P1.x); else
                                Q.x = P1.x;
                        }else

                if ((C & TOP) != EMPTY) {         // schneide mit oberer Fenster-Kante
                        Q.y = ymax;
                        if (finite_slope)
                                Q.x = (int)((Q.y-P1.y)/slope + P1.x); else
                                Q.x = P1.x;
                        }

                if (C==C1) {
                        P1.x = Q.x; P1.y = Q.y; C1 = region_code (P1);
                } else {
                        P2.x = Q.x; P2.y = Q.y; C2 = region_code (P2);
                }
            }

        }
        // uebergib Anfang und Ende des sichtbaren Teils
        Q1.x=P1.x; Q1.y=P1.y;
        Q2.x=P2.x; Q2.y=P2.y;

        return(true);
}
```

5.2 Clipping von Polygonen

Für das Clippen von Polygonen reicht es nicht, jede beteiligte Kante zu clippen:

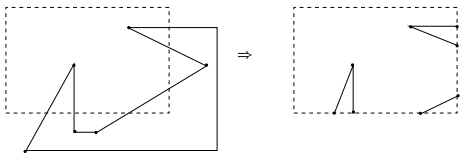


Abbildung 5.5: Zerfall eines Polygons bei reinem Linien-Clippen

Vielmehr müssen zusätzlich die Ein- und Austrittspunkte verbunden werden, um nach dem Clipping wieder ein Polygon zu erhalten:

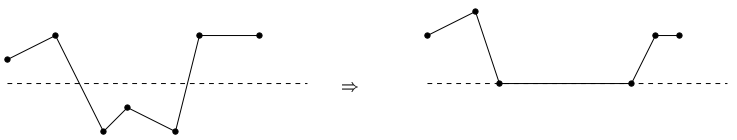


Abbildung 5.6: Verbinden der Ein- und Austrittspunkte

Obacht: Bzgl. der Ecken des Clip-Windows ist eine Spezialbehandlung erforderlich:

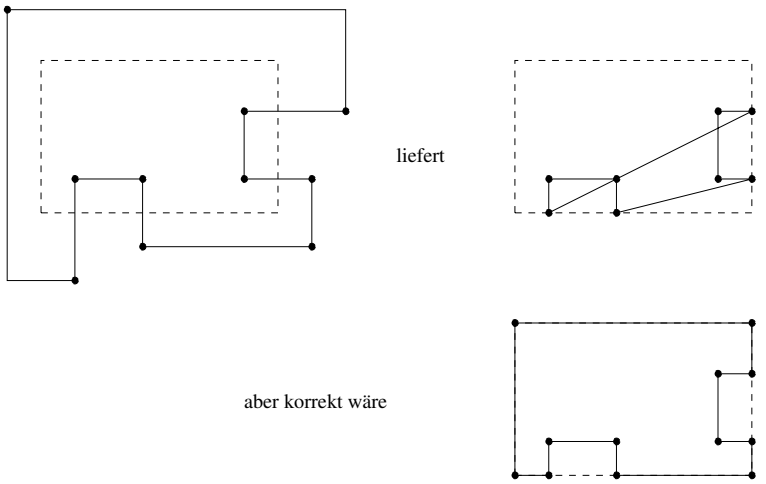


Abbildung 5.7: Spezialbehandlung an den Clipfensterecken

Der **Sutherland & Hodgman-Algorithmus** clippt an vier Fensterkanten nacheinander:

```
fuer jede Clipping-Gerade E tue:
  fuer jeden Polygonpunkt P tue:
    falls P sichtbar: uebernimm ihn
    falls Kante von P zu seinem Nachfolger E schneidet:
          uebernimm den Schnittpunkt
```

```
/*****************************************************************************/
/*                                                                           */
/*              Clippen von Polygonen an einem Fenster nach Sutherland-Hodgmann         */
/*                                                                           */
/*****************************************************************************/

private boolean On_Visible_Side(                        /* liefert true, falls          */
                        Point P,                        /* Punkt p auf der sichtbaren   */
                        int wert,                       /* Seite der Kante wert liegt   */
                        int fall)                       /* gemaess Fall fall            */
{
        switch (fall) {

                case 0: return (P.x >= wert);        /* linke  Fenster-Kante            */
                case 1: return (P.y >= wert);        /* untere Fenster-Kante            */
                case 2: return (P.x <= wert);        /* rechte Fenster-Kante            */
                case 3: return (P.y <= wert);        /* obere  Fenster-Kante            */
        }

        return false;
}


private boolean Intersection(                   /* liefert true,                        */
                        Point P1, Point P2,     /* falls sich die Linie P1-P2           */
                        int wert,               /* mit Clipping-Kante wert schneidet    */
                        int fall,               /* gemaess Fall fall                    */
                        Point I)                /* liefert den Schnittpunkt I zurueck   */
{
        boolean P1_vis, P2_vis;                 /* true, falls P1 bzw P2 sichtbar       */
        double slope;                           /* Steigung der Geraden P1-P2           */
                                                /* y = (x-P1.x)*slope + P1.y            */

        P1_vis = On_Visible_Side(P1,wert,fall);        /* P1 sichtbar ?                 */
        P2_vis = On_Visible_Side(P2,wert,fall);        /* P2 sichtbar ?                 */

        if ((P1_vis && P2_vis) || (!P1_vis && !P2_vis)) return (false);/*kein Schnittpkt*/
        else
        {
                slope = (double)(P2.y-P1.y) / (double) (P2.x-P1.x);   /* Steigung       */

                if (fall%2==1) {
                        I.x = (int)((wert-P1.y) / slope) + P1.x;
                        I.y = wert;
                } else
                {
                        I.x = wert;
                        I.y = (int)((wert-P1.x) * slope) + P1.y;
                }
                return(true);
        }
}
```

```
private int sutherland_hodgman(                 /* fuehrt ein Clipping durch          */
                        int num_points,         /* fuer num_points Punkte             */
                        Point[] points,         /* der Polygonliste Points            */
                        int wert,               /* bezueglich Clipping-Kante wert     */
                        int fall)               /* gemaess Fall fall                  */
                                                /* liefert neue Anzahl Punkte         */
{
    int     i;
    int     old_ptr = 0;
    int     new_ptr = 0;
    Point   S, I;
    Point[] hpoints = new Point[MAX_POINTS];

    if (num_points > 2) {

        points[num_points] = points[0];

        while (old_ptr < num_points) {

            S = points[old_ptr++];
            if (On_Visible_Side(S,wert,fall)) hpoints[new_ptr++] = S;

            I = new Point();
            if (Intersection(S,points[old_ptr],wert,fall,I)) hpoints[new_ptr++] = I;
        }

        for (i=0; i<new_ptr; i++) points[i]=hpoints[i];
        return new_ptr;
}
```

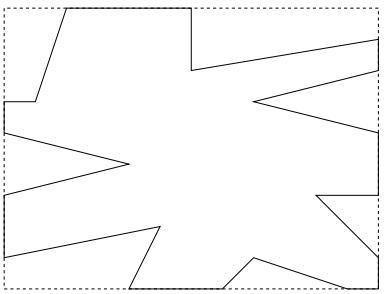


Abbildung 5.8: Vom Sutherland-Hodgman-Algorithmus geclipptes Polygon

5.3 Beispiel-Applet zu 2D-Operationen

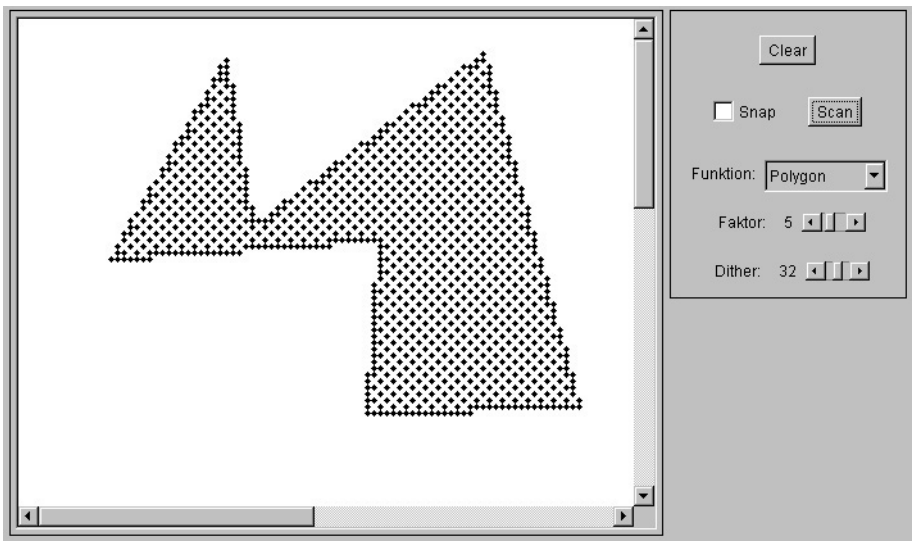


Abbildung 5.9: Screenshot vom 2D-Basic-Applet

Kapitel 6

2D-Transformationen

Transformationen eines Objekts werden durch Operationen auf den Definitionspunkten realisiert. Durch 2 Punkte definierte Rechtecke müssen zunächst zu Polygonen gemacht werden.

6.1 Translation

Gradlinige Verschiebung um einen Translationsvektor $T = (t_x, t_y)$, d.h. $P' := P + T$

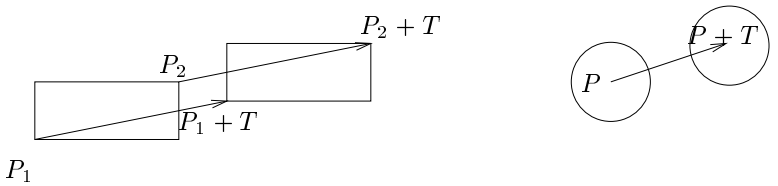


Abbildung 6.1: Translation von Rechtecken und Kreisen

6.2 Skalierung

Vergrößerung bzw. Verkleinerung bzgl. eines Fixpunktes. Zunächst liege der Fixpunkt im Ursprung $(0, 0)$.

$$(x', y') \quad := \quad (s_x \cdot x, s_y \cdot y)$$

$s_x = s_y \Rightarrow$ uniforme Skalierung; $s_x \neq s_y \Rightarrow$ Verzerrung

Abbildung 6.2 zeigt ein Beispiel für eine Skalierung bezüglich des Ursprungs mit den Faktoren $s_x = 4,\ s_y = 2$.

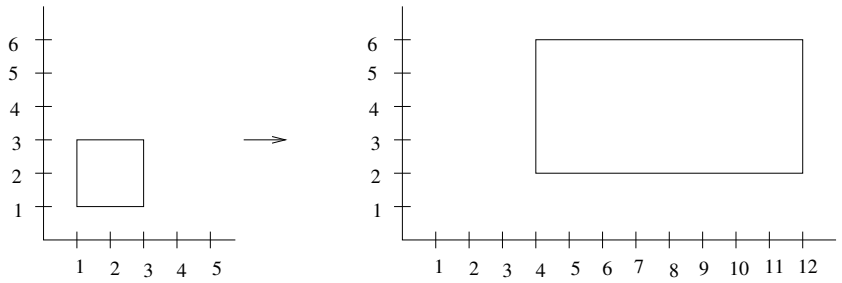


Abbildung 6.2: Skalierung mit $s_x = 4$ und $s_y = 2$

Bei Wahl eines beliebigen Fixpunktes (Z_x, Z_y) folgt für den Punkt P:

1. Translation um $(-Z_x, -Z_y)$ liefert P_1.
2. Skalierung mit (s_x, s_y) liefert P_2.
3. Translation um (Z_x, Z_y) liefert $P_3 = P'$.

Die neuen Koordiaten berechnen sich dann wie folgt:

$$\Rightarrow (x', y') := ((x - Z_x) \cdot s_x + Z_x, (y - Z_y) \cdot s_y + Z_y)$$

Vorteilhafter bei mehreren Objekten:

$$\begin{aligned} (x', y') &= (x \cdot s_x + d_x, y \cdot s_y + d_y) \\ &\quad \text{mit } d_x = Z_x \cdot (1 - s_x), d_y = Z_y \cdot (1 - s_y) \end{aligned}$$

Abbildung 6.3 zeigt ein Beispiel für eine Skalierung bezüglich des Punktes $Z = (1, 3)$ mit den Faktoren $s_x = 3$, $s_y = 2$.

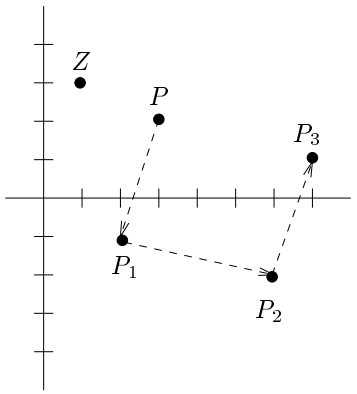
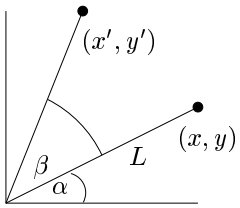


Abbildung 6.3: Skalierung bzgl. Punkt (1,3) mit Faktoren $s_x = 3$ und $s_y = 2$

6.3 Rotation

Drehung des Objekts bzgl. eines Fixpunktes um einen Winkel β. Der Fixpunkt liege im Ursprung.



$$L = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\sin(\alpha) = y/L$$
$$\cos(\alpha) = x/L$$

Abbildung 6.4: Rotation um den Winkel β bzgl. des Ursprungs

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta) &= \cos(\beta)\cdot\sin(\alpha) + \sin(\beta)\cdot\cos(\alpha) \\
\cos(\alpha+\beta) &= \cos(\beta)\cdot\cos(\alpha) - \sin(\beta)\cdot\sin(\alpha) \\
\sin(\alpha+\beta) = y'/L &= \cos(\beta)\cdot\sin(\alpha) + \sin(\beta)\cdot\cos(\alpha) \\
\Rightarrow y' &= L\cdot\cos(\beta)\cdot\frac{y}{L} + L\cdot\sin(\beta)\cdot\frac{x}{L} \\
\Rightarrow y' &= y\cdot\cos(\beta) + x\cdot\sin(\beta) \\
\cos(\alpha+\beta) = x'/L &= \cos(\beta)\cdot\cos(\alpha) - \sin(\beta)\cdot\sin(\alpha) \\
\Rightarrow x' &= L\cdot\cos(\beta)\cdot\frac{x}{L} - \sin(\beta)\cdot\frac{y}{L}\cdot L \\
\Rightarrow x' &= x\cdot\cos(\beta) - y\cdot\sin(\beta)
\end{aligned}$$

Positive Werte für den Drehwinkel β bewirken eine Rotation gegen den Uhrzeigersinn.
Bei Wahl eines beliebigen Rotationszentrums (R_x, R_y) folgt für den Punkt P

1. Translation um $(-R_x, -R_y)$ liefert P_1
2. Rotation bzgl. Ursprung um Winkel β liefert P_2
3. Translation um (R_x, R_y) liefert $P_3 = P'$

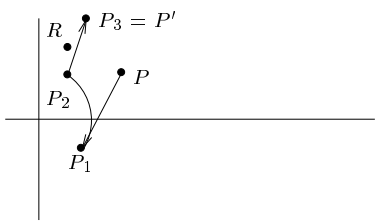


Abbildung 6.5: Rotation des Punktes P um 90 Grad bzgl Punkt R

```
/*****************************************************************************/
/*                                                                           */
/*                      Skalieren und Rotieren eines Polygons                */
/*                      Obacht: Da die Polygon-Koordinaten ganzzahlig sind,  */
/*                      verstaerken sich die Rundungsfehler nach jeder Transformation */
/*                                                                           */
/*****************************************************************************/

private static final double DEG_TO_RAD = Math.PI/180.0; // Umrechnung Grad in Bogenmass


private void skalier_polygon(           // skaliert ein Polygon
                        Point[] points, // gespeichert im Array points
                        int n,          // mit n Eckpunkten
                        double sx,      // in x-Richtung um den Faktor sx
                        double sy,      // in y-Richtung um den Faktor sy
                        Point  z)       // bezueglich des Punktes z
{
        int i;
        for (i=0; i< n; i++) {

                points[i].x = (int)((points[i].x - z.x ) * sx + z.x + 0.5);
                points[i].y = (int)((points[i].y - z.y ) * sy + z.y + 0.5);

        }
}


private void rotate_polygon(            // rotiert ein Polygon
                        Point[] points, // gespeichert im Array points
                        int   n,        // mit n Eckpunkten
                        int   g,        // um einen Winkel von g Grad
                        Point z)        // bezueglich des Punktes z
{
        int i;
double beta = g * DEG_TO_RAD;   // Winkel im Bogenmass
        Point P = new Point();

        for (i=0; i < n; i++) {

                P.x = (int)((points[i].x - z.x ) * Math.cos( beta ) -
                      (points[i].y - z.y ) * Math.sin( beta ) + z.x + 0.5);

                P.y = (int)((points[i].y - z.y ) * Math.cos( beta ) +
                      (points[i].x - z.x ) * Math.sin( beta ) + z.y + 0.5);

                points[i].x = P.x;
                points[i].y = P.y;

        }
}
```

6.4 Homogene Koordinaten

Häufig werden mehrere Transformationen hintereinander auf ein Objekt angewendet. Es entstehen Rundungsfehler, wenn nach jeder Einzel-Transformation die ganzzahligen Koordinaten bestimmt werden. Deshalb sollten mehrere Transformationen zu einer zusammengesetzt werden.

Ein Punkt $P = (x, y)$ hat die *homogenen* Koordinaten $[x_h, y_h, w]$ mit $w \neq 0$ und

$$\begin{aligned} x_h &= x \cdot w \\ y_h &= y \cdot w \end{aligned}$$

Beispiel: Das homogene Koordinatentripel $[6, 8, 2]$ gehört zum Punkt $P = (3, 4)$. Derselbe Punkt hat die homogenen Koordiaten $[3, 4, 1]$.

Ein Richtungsvektor $R = (x, y)$ hat die homogenen Koordinaten $[x, y, 0]$.

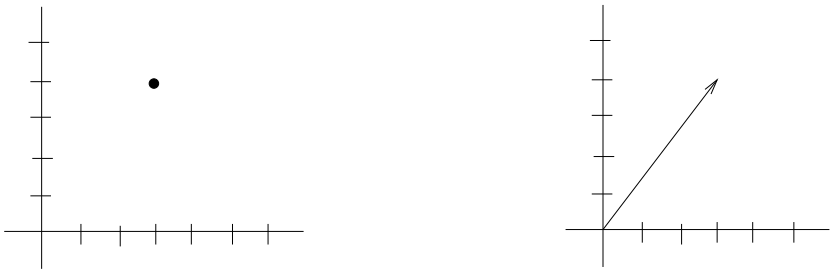


Abbildung 6.6: Punkt (3,4) und Richtungsvektor (3,4)

Die Transformationen Translation, Skalierung und Rotation werden nun als 3×3-Matrizen realisiert. Zusammengesetzte Transformationen ergeben sich durch Matrix-Multiplikation.

Translation

$$[x', y', 1] := [x, y, 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ t_x & t_y & 1 \end{bmatrix} = [x + t_x, y + t_y, 1]$$

Skalierung

$$[x', y', 1] := [x, y, 1] \cdot \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [x \cdot s_x, y \cdot s_y, 1]$$

Rotation

$$[x', y', 1] := [x, y, 1] \cdot \begin{bmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta) & 0 \\ -\sin(\beta) & \cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [x \cdot \cos(\beta) - y \cdot \sin(\beta), x \cdot \sin(\beta) + y \cdot \cos(\beta), 1]$$

Für die Auswertung einer zusammengesetzten Transformation

- gilt das Assoziativgesetz, d.h. $A \cdot B \cdot C = (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$,
- gilt im allgemeinen nicht das Kommutativgesetz, d.h. $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Beispiel: Translation um $(-3, -1)$ mit anschließender Rotation um $90°$ ist verschieden von Rotation um $90°$ mit anschließender Translation um $(-3, -1)$.

Beispiel: Rotation bzgl. $(3, 1)$ um $60°$

Matrix für Translation um $(-3, -1)$ lautet

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrix für Rotation um $60°$ lautet

$$B = \begin{bmatrix} 0.50 & 0.86 & 0.00 \\ -0.86 & 0.50 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 1.00 \end{bmatrix}$$

Matrix für Translation um $(3, 1)$ lautet

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrix für gesamte Transformation lautet

$$D = A \cdot B \cdot C = \begin{bmatrix} 0.50 & 0.86 & 0 \\ -0.86 & 0.50 & 0 \\ 2.36 & -2.08 & 1 \end{bmatrix}$$

6.5 Allgemeine Transformationen

Weitere Transformationen, die sich durch Matrizen darstellen lassen, sind

- Spiegelung an einer beliebigen Geraden,
- Spiegelung an einem Punkt,
- Scherung.

Bei der Scherung in x bleiben die y-Werte konstant, und die x-Werte werden proportional zu den y-Werten horizontal verschoben, d.h. $x' = x + Sch_x \cdot y$.
Die Transformationsmatrix lautet:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ Sch_x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ bzw. } \begin{bmatrix} 1 & Sch_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

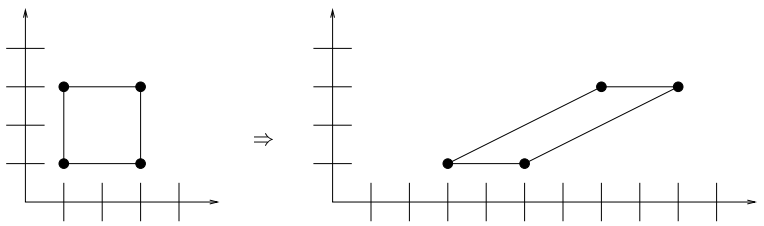


Abbildung 6.7: Scherung mit $Sch_x = 2$

6.6 Raster-Transformationen

Es werden nicht die Definitionspunkte, sondern die Pixel im Frame-Buffer modifiziert:

- Verschieben eines Fensterinhalts (Move),
- Kopieren eines Fensterinhalts (Copy),
- Vergrößern eines Fensterinhalts (Zoom).

Statt Pixelwerte zu setzen, können auch AND-, OR-, XOR-Verknüpfungen verwendet werden. Es gilt (x XOR y) XOR $y = x$. XOR ist daher geeignet, ein Objekt über den Schirm zu bewegen, ohne den Hintergrund zu zerstören.

```
zeichne Objekt mit XOR
repeat
   loesche Objekt mit XOR
   modifiziere Objekt_Koordinaten
   zeichne Objekt mit XOR
until Objekt am Ziel
```

Allerdings ändert das bewegte Objekt je nach Hintergrundfarbe sein Aussehen.

Kapitel 7

Kurven

Problem: Spezifiziere und zeichne eine beliebige "glatte" Kurve.

7.1 Algebraischer Ansatz

Gegeben n Stützpunkte.
Bestimme Polynom $(n-1)$-ten Grades

$$y = a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$$

welches durch alle Stützpunkte läuft.
Problem: Bei der Auswertung des Polynoms treten wegen der hohen Potenzen hohe Rechenzeiten und große Rundungsfehler auf. Außerdem oszilliert die Kurve.

7.2 Splines

Gegeben n Stützpunkte. Wähle $n-1$ Kurven kleiner Ordnung für den Verlauf innerhalb der $n-1$ Intervalle.

Kurven erster Ordnung (Geraden) ergeben nur den Linienzug.

Kurven zweiter Ordnung (Parabeln) sind an den Intervallgrenzen nur einmal differenzierbar.

Kurven dritter Ordnung mit stetigen ersten und zweiten Ableitungen an den Intervallgrenzen (kubische Splines) können zu einer Gesamtkurve mit weichen Übergängen an den Nahtstellen zusammengesetzt werden.

Gesucht: Approximation einer Kurve $f(t)$, die durch n vorgegebene Punkte laufen soll.

Bemerkung: f ist in parametrischer Form gegeben (d.h. $x = g(t), y = h(t)$), da die explizite Form $y = f(x)$ pro x-Wert nur einen y-Wert erlaubt.

Die n Stützpunkte seien $f(t_i)$, die resultierenden Intervalle seien $[t_i, t_{i+1}]$, die für das Intervall i zuständige Funktion sei $f_i(t)$, $1 \leq i \leq n-1$.

Jedes f_i hat die Form

$$\begin{aligned} f_i(t) &= f(t_i) + a_i \cdot (t - t_i) + b_i \cdot (t - t_i)^2 + c_i \cdot (t - t_i)^3 \\ & \quad t_i \leq t \leq t_{i+1},\ i = 1, \ldots, n-1 \end{aligned}$$

Es muß gelten

$f_i(t_{i+1})$	$=$	$f_{i+1}(t_{i+1})$	für	$i = 1, \ldots, n-2$	gleicher Wert
$f_i'(t_{i+1})$	$=$	$f_{i+1}'(t_{i+1})$	für	$i = 1, \ldots, n-2$	gleiche Steigung
$f_i''(t_{i+1})$	$=$	$f_{i+1}''(t_{i+1})$	für	$i = 1, \ldots, n-2$	gleiche Steigungsänderung

Nach Vorgabe von a_1 und a_{n-1} entsteht ein Gleichungssystem mit $n-2$ Gleichungen und $n-2$ Unbekannten $a_2, a_3, \ldots, a_{n-2}$.

Die Werte von a_1 und a_{n-1} können z.B. ermittelt werden durch Festlegung $f''(t_1) = f''(t_n) = 0$ (natürliche Spline-Interpolation).

Für die Folge t_i reicht jede monoton wachsende Folge. Geeignet ist z.B. die Folge der euklidischen Abstände zwischen den Stützpunkten. Statt den Abstand $d = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ zu berechnen, verwendet man die Näherungsformel $\frac{1}{3} \cdot (dx + dy + 2 \cdot \max(dx, dy))$.

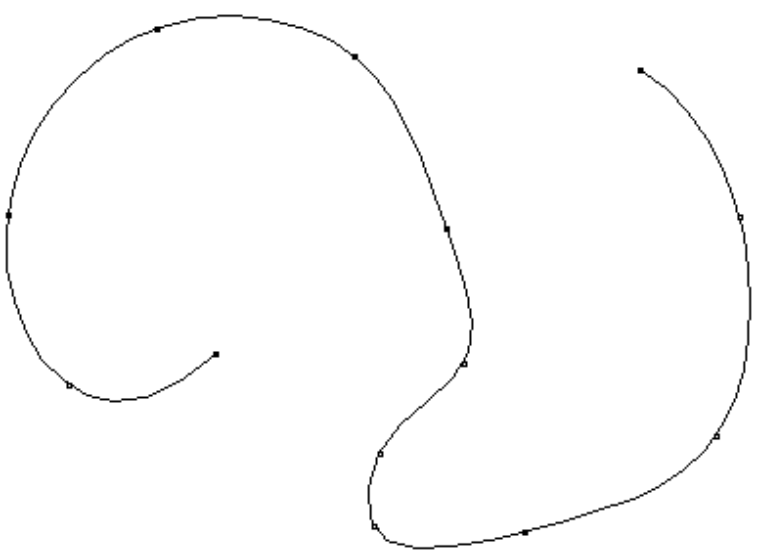


Abbildung 7.1: Vom Spline-Algorithmus erzeugte Kurveninterpolation

```
/*****************************************************************************/
/*               Spline-Interpolation durch Polynome 3. Grades               */
/*****************************************************************************/

private static double[] calcfx = new double[MAX_POINTS];        // x-Funktionswerte
private static double[] calcfy = new double[MAX_POINTS];        // y-Funktionswerte
private static double[] x = new double[MAX_POINTS];  // x-Koordinaten der Stuetzpunkte
private static double[] y = new double[MAX_POINTS];  // y-Koordinaten der Stuetzpunkte
private static double[] t = new double[MAX_POINTS];  // t-Werte der Stuetzpunkte

void besetze_arrays(                          // berechnet Intervallgrenzen
              int point_cnt,                  // Anzahl der Polygonpunkte
              Point punkt[])                  // Punktliste
{
      int i;
      double ax,ay,dd;

      for (i=0; i<point_cnt; i++) {           // besetze x- und y-Koordinaten
              x[i] = (double) punkt[i+1].x;
              y[i] = (double) punkt[i+1].y;}
      t[0] = 0.0;                             // besetze t-Werte mit dem
      for (i=1; i<point_cnt; i++) {           // Euklidischen Abstand der Stuetzpunke
              ax=Math.abs(x[i]-x[i-1]);
              ay=Math.abs(y[i]-y[i-1]);
              dd = ax + ay;
              if (ax > ay) dd = dd+2*ax;      // Naeherungsformel fuer Euklid:
                      else dd = dd+2*ay;      // Abstand = 1/3*(dx+dy+2*max{dx,dy})
              t[i] = t[i-1]+dd/3;
      }
}



void curve_fitting(                         // berechnet die Approximation der Kurve
      int point_cnt,                        // fuer point_cnt Stuetzpunkte
      Point punkt[],                        // uebergeben im Array punkt
      int spline_size)                      // fuer spline_size Interpolationswerte
{
      int i,n=0;
      besetze_arrays(point_cnt, punkt);              // erzeuge Intervallgrenzen und
                                                     // Gleitkommaversion von punkt
      cubic_spline(point_cnt, t, x, spline_size, calcfx);  // bestimme Interpol.werte
      cubic_spline(point_cnt, t, y, spline_size, calcfy);  // bestimme Interpol.werte
      for (i=0; i<spline_size; i++)                        // und uebertrage sie
        spline_punkt[i+1] = new Point((int)calcfx[i],(int)calcfy[i]);
}
```

```
void cubic_spline(                  // loest Gleichungssystem zur Bestimmung
                                    // der Koeffizienten a,b,c
              int n,                // Anzahl der Stuetzpunkte
              double t[], double f[], // Stuetzpunkte in der Form (t[i],f[t[i]])
              int spline_size,      // Anzahl der Interpolationswerte
              double calcf[])       // Ausgabearray: Interpolationswerte
{
      int i,j;
      double a[] = new double[MAX_POINTS];
      double b[] = new double[MAX_POINTS];
      double c[] = new double[MAX_POINTS];
      double delta_t[] = new double[MAX_POINTS];
      double D[] = new double[MAX_POINTS];
      double m[] = new double[MAX_POINTS];
      double k[] = new double[MAX_POINTS];
      double bh,dh,e,h,wt,dt;
      for (i=1; i<n; i++) {
              delta_t[i] = t[i]-t[i-1];
              D[i] = (f[i]-f[i-1])/delta_t[i];
      }
      m[0] = delta_t[2];
      delta_t[0] = t[2]-t[0];
      h = delta_t[1];
      k[0] = ((h + 2*delta_t[0])*D[1]*delta_t[2]+h*h*D[2])/delta_t[0];
      for (i=1; i<(n-1); i++) {
              h = -delta_t[i+1]/m[i-1];
              k[i] = h*k[i-1]+3*(delta_t[i]*D[i+1]+delta_t[i+1]*D[i]);
              m[i] = h *delta_t[i-1] + 2* (delta_t[i] + delta_t[i+1]);
      }
      h = t[n-1]-t[n-3];
      dh = delta_t[n-1];
      k[n-1] = ((dh+h+h)*D[n-1]*delta_t[n-2] +  dh*dh*D[n-2])/h;
      h = -h/m[n-2];
      m[n-1] = delta_t[n-2];
      m[n-1] = h*delta_t[n-2] + m[n-1];
      a[n-1] = (h*k[n-2]+k[n-1])/m[n-1];
      for (i=n-2; i>=0; i--) a[i] = (k[i]-delta_t[i]*a[i+1])/m[i];
      for (i=1; i<n; i++) {
              dh = D[i]; bh = delta_t[i];
              e = a[i-1]+a[i]-dh-dh;
              b[i-1] = 2*(dh-a[i-1]-e)/bh;
              c[i-1] = 6*e/(bh*bh);
      }
      wt = 0; j=0;
      dt = t[n-1]/(double)(spline_size-1);
      for (i=0; i<spline_size; i++) {
              while ((t[j+1]<wt)&&(j<spline_size)) j++;
              h = wt - t[j];
              calcf[i] = f[j]+h*(a[j]+h*(b[j]+h*c[j]/3)/2);
              wt = wt+dt;
      }
      calcf[spline_size-1]= f[n-1];
}
```

7.3 Bézier-Kurven

Spezifiziere die Kurve durch $n+1$ Stützpunkte $P_0, P_1, \ldots, P_n$. Die Kurve läuft nicht durch alle Stützpunkte, sondern wird von ihnen beeinflußt.

$$P(t) = \sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t) \cdot P_i, \quad 0 \leq t \leq 1$$

Der Punkt P_i wird gewichtet mit Hilfe eines Bernstein-Polynoms.

$$B_{i,n}(t) = \frac{n!}{i! \cdot (n-i)!} \cdot t^i \cdot (1-t)^{n-i}, \; i = 0, ..., n$$

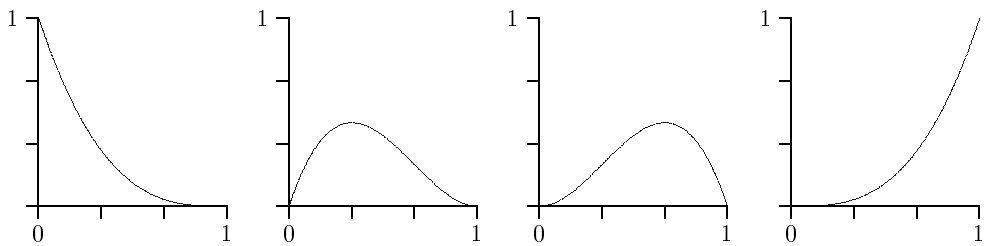


Abbildung 7.2: Verlauf der Bernsteinpolynome für n=3

Die wichtigsten Eigenschaften der Bernsteinpolynome:

- alle Bernsteinpolynome sind positiv auf $[0, 1]$,
- für jedes feste t gilt $\sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t) = 1$,
- $B_{i,n}(t) = B_{n-i,n}(1-t)$,
- $\frac{dB_{i,n}(t)}{dt} = n \cdot (B_{i-1,n-1}(t) - B_{i,n-1}(t)), i > 0$,
- Maxima von $B_{i,n}(t)$ in $[0, 1]$ an den Stellen $t = \frac{i}{n}, i = 0, \ldots, n$.

Da alle Bernsteinpolynome für $0 < t < 1$ ungleich Null sind, beeinflussen alle Stützpunkte in diesem Intervall den Kurvenverlauf.

Die Kurve beginnt im Stützpunkt P_0 tangential zur Geraden $\overline{P_0 P_1}$, endet im Stützpunkt P_n tangential zur Geraden $\overline{P_{n-1} P_n}$ und verläuft innerhalb der konvexen Hülle der Stützpunkte. Somit können mehrere Bézier-Kurven aneinandergesetzt werden durch Identifikation von Endpunkt und Anfangspunkt aufeinanderfolgender Bézierkurven. Einen stetig differenzierbaren Übergang erreicht man bei Kollinearität der Punkte $P_{n-1}, P_n = Q_0, Q_1$.

Berechnung der Bézier-Kurve nach de Casteljau

Um die aufwendige Auswertung der Bernsteinpolynome zu vermeiden, wurde von de Casteljau ein Iterationsverfahren vorgeschlagen, welches durch fortgesetztes Zerteilen von Linien den gewünschten Kurvenpunkt approximieren kann.

Es gilt:

$$P(t)_{0,n} = (1-t) \cdot P(t)_{0,n-1} + t \cdot P(t)_{1,n}$$

wobei die tiefgestellten Indizes angeben, welche Stützpunkte in die Berechnung einfließen. D.h. eine Bézier-Kurve vom Grad n läßt sich durch zwei Bézier-Kurven vom Grad $n-1$ definieren, indem für ein festes t die Punkte beider Kurven berechnet werden, und die Verbindungsstrecke im Verhältnis t geteilt wird.

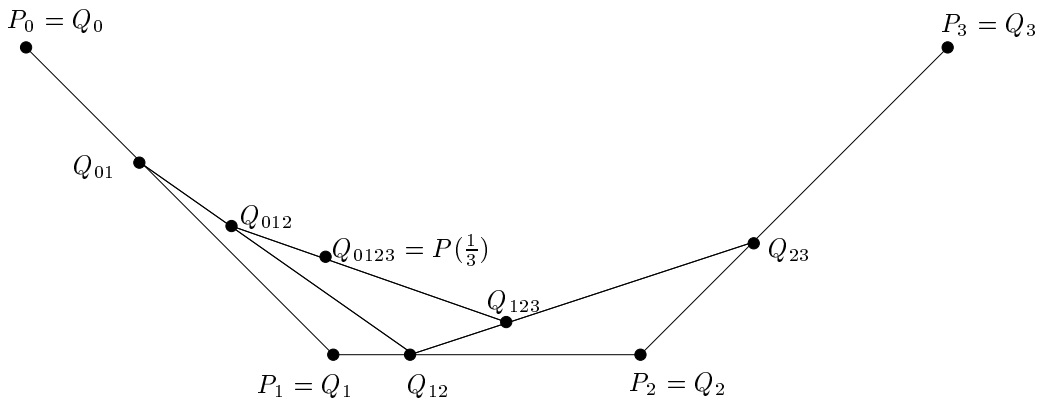


Abbildung 7.3: Approximation einer Bezier-Kurve nach de Castelau

Abbildung 7.3 zeigt die Berechnung eines Kurvenpunktes für $t = \frac{1}{3}$. Die Indizes geben an, welche Stützpunkte beteiligt sind. Abbildung **??** zeigt das Ergebnis dieser Iteration für zwei aneinanderliegende Bézierkurven bei Rekursionstiefe 3.

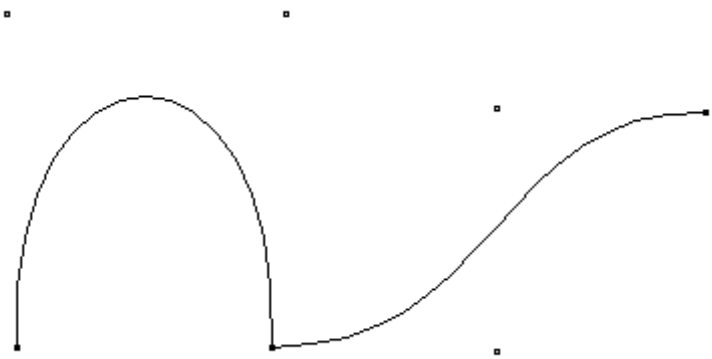


Abbildung 7.4: Vom De Casteljau-Algorithmus mit Rekursionstiefe 3 gezeichnete Bezierkurven

```
/*****************************************************************************/
/*                                                                           */
/*                  Zeichnen einer Bezierkurve 3. Grades nach De Casteljau   */
/*                                                                           */
/*****************************************************************************/

private void bezier(                            // Zeichne Bezierkurve 3. Grades
                     double px0, double py0,    // anhand des Stuetzpunktes p0
                     double px1, double py1,    // anhand des Stuetzpunktes p1
                     double px2, double py2,    // anhand des Stuetzpunktes p2
                     double px3, double py3,    // anhand des Stuetzpunktes p3
                     int depth)                 // aktuelle Rekursionstiefe
{
        double qx01,qy01,qx12,qy12,qx23,qy23,qx012,qy012,qx123,qy123,qx0123,qy0123;
                                                // Hilfspunkte

        if (depth > iter)                       // Iterationstiefe erreicht
             set_line(new Point( (int)px0, (int)py0), new Point( (int)px3, (int)py3));
        else {
                depth++;

                qx01   = (px0+px1)/2;     qy01   = (py0+py1)/2;
                qx12   = (px1+px2)/2;     qy12   = (py1+py2)/2;
                qx23   = (px2+px3)/2;     qy23   = (py2+py3)/2;
                qx012  = (qx01+qx12)/2;   qy012  = (qy01+qy12)/2;
                qx123  = (qx12+qx23)/2;   qy123  = (qy12+qy23)/2;
                qx0123 = (qx012+qx123)/2; qy0123 = (qy012+qy123)/2;

                bezier (px0,py0,qx01,qy01,qx012,qy012,qx0123,qy0123,depth);
                bezier (qx0123,qy0123,qx123,qy123,qx23,qy23,px3,py3,depth);
        }
}
```

7.4 B-Splines

Es sollen nun nicht alle Stützpunkte Einfluß auf den gesamten Kurvenverlauf haben und der Grad der Polynome soll unabhängig von der Zahl der Stützpunkte sein.

Spezifiziere die Kurve durch $n+1$ Stützpunkte $P_0, \ldots, P_n$ und einen Knotenvektor $T = (t_0, t_1, \ldots, t_{n+k}), t_j \leq t_{j+1}$.

$$P(t) = \sum_{i=0}^{n} N_{i,k}(t) \cdot P_i$$

Die Punkte P_i wirken sich nur auf maximal k Kurvenabschnitte aus und werden gewichtet durch die Basis des B-Splines, Polynome $N_{i,k}(t)$ vom Grad $k-1$ $(0 \leq i \leq n)$:

$$
\begin{aligned}
N_{i,1}(t) &= \begin{cases} 1 & \text{falls } t_i < t_{i+1} \;\; und \;\; t_i \leq t \leq t_{i+1} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\
N_{i,k}(t) &= \frac{t - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} \cdot N_{i,k-1}(t) + \frac{t_{i+k} - t}{t_{i+k} - t_{i+1}} \cdot N_{i+1,k-1}(t), \;\; k > 1
\end{aligned}
$$

Bei Division durch Null wird der Quotient gleich 0 gesetzt.
Der Knotenvektor wird häufig wie folgt gewählt für $0 \leq j \leq n+k$:

$$
t_j = \begin{cases} 0 & \text{falls } j < k \\ j - k + 1 & \text{falls } k \leq j \leq n \\ n - k + 2 & \text{falls } j > n \end{cases}
$$

Hierdurch wird t im Intervall $[0, n-k+2]$ definiert.

Beispiel: $k = 3$, $n = 4$ ergibt einen uniformen quadratischen B-Spline mit dem Knotenvektor $T = (0,0,0,1,2,3,3,3)$. Die Stützpunkte P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 haben nur lokal Einfluß auf den Kurvenverlauf, und zwar in den Intervallen $t \in [0,1], [0,2], [0,3], [1,3], [2,3]$.

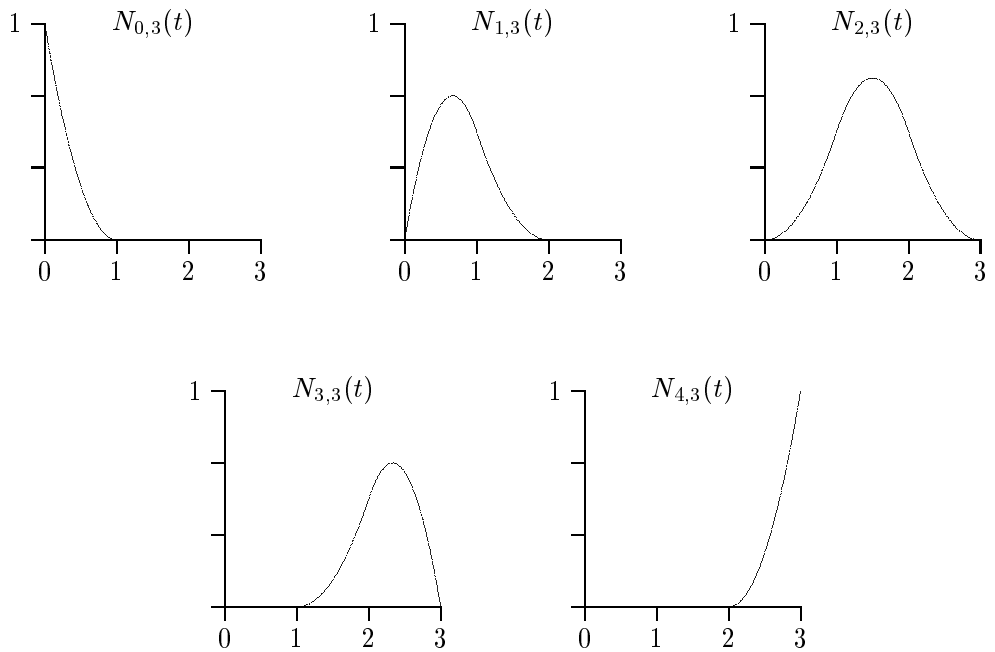


Abbildung 7.5: Verlauf der Gewichtungspolynome $N_{i,k}$ für $k = 3$

Sonderfall

Für $k = n + 1$ ergibt sich für den Knotenvektor der Sonderfall $T = (\underbrace{0, ..., 0}_{k \text{ mal}}, \underbrace{1, ..., 1}_{k \text{ mal}})$.

Die zugehörigen B-Splinefunktionen haben die schon bekannte Form

$$N_{i,k}(t) = \frac{(k-1)!}{i! \cdot (k-1-i)!} \cdot t^i \cdot (1-t)^{k-1-i}, \ i = 0, ..., k-1$$

Somit lassen sich also die B-Splinefunktionen als Verallgemeinerung der Bernsteinpolynome auffassen.

Wie bei den Bernsteinpolynomen gilt auch für die B-Splinefunktionen $N_{i,k}$, daß sie positiv sind, und $\sum_{i=0}^{n} N_{i,k} = 1$.

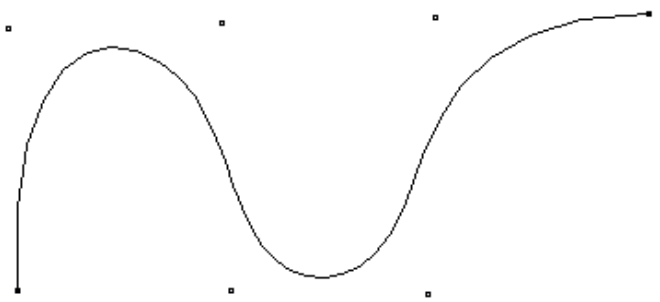


Abbildung 7.6: B-Spline mit $n = 6$, $k = 4$ und 35 Interpolationspunkten

7.5 NURBS

Die allgemeinste Form zum Zeichnen von Kurven wird realisiert durch die sogenannten *NURBS (nonuniform rational basis splines).*

Dabei bedeutet

nonuniform: Der Abstand zwischen den Werten des Kontrollvektors ist ungleichmäßig (und nicht *uniform* wie bei den *B-Splines*).

rational: Der Einfluß eines Kontrollpunktes wird über ein Gewicht gesteuert, welches durch den Quotienten (*ratio*) zweier Polynome gebildet wird.

NURBS sind (im Gegensatz zu allgemeinen *B-Splines*) in der Lage, Kreisstücke zu beschreiben und sind invariant bzgl. perspektivischer Projektion. Dies bedeutet, daß zur Projektion einer Kurve nicht alle Kurvenpunkte projeziert werden müssen, sondern es reicht, die Stützpunkte zu projezieren und dann zu einer Kurve zu verbinden.

7.6 Beispiel-Applet zu Splines

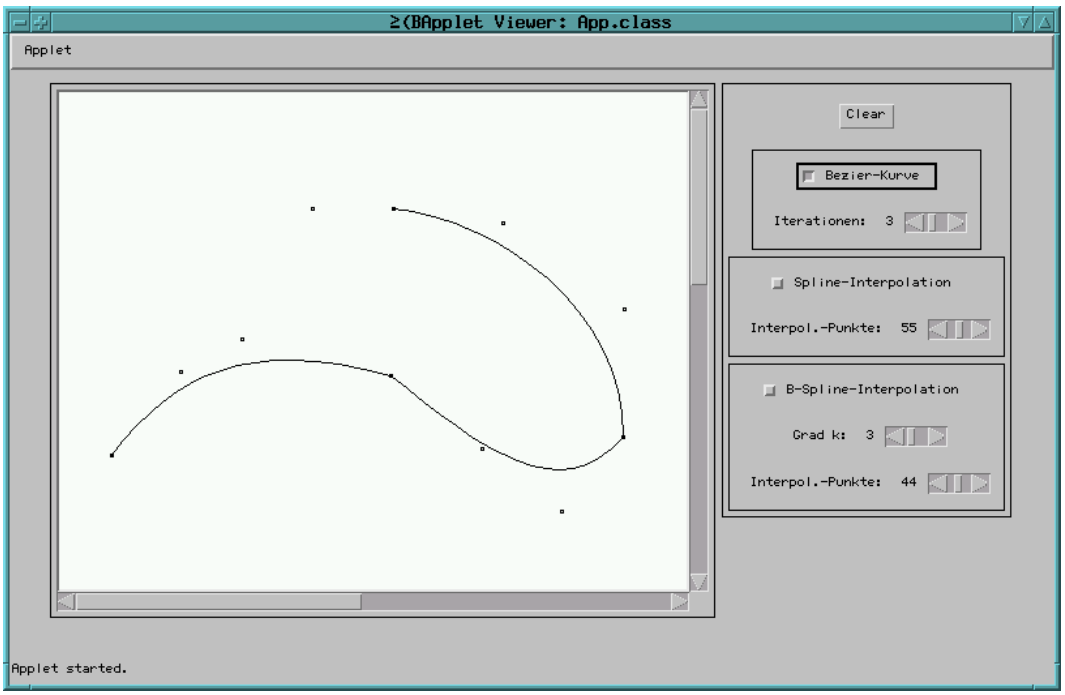


Abbildung 7.7: Screenshot vom Splines-Applet

7.7 Macromedia Flash

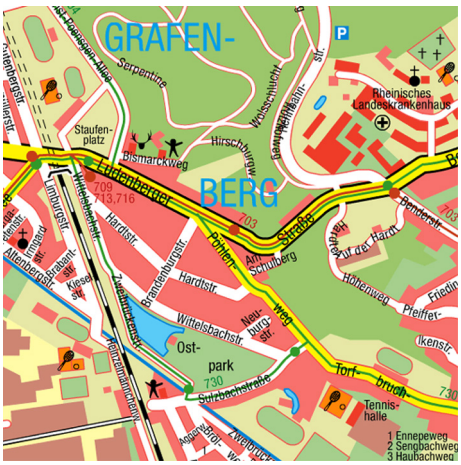
Macromedia Flash ist ein Werkzeug zum Editieren und Animieren von zweidimensionalen Vektorgrafiken. Durch sein kompaktes Speicherformat ist es besonders geeignet für plakative, animierte Grafiken im Internet. Zum Abspielen in einem Web-Browser ist das Macromedia-Flash-Plugin erforderlich.

Beispiel für Flash in der Kartographie vom Verwaltungsverlag:
`http://www.stadtplan.net/brd/nrw/duesseldorf/home.html` .

Vortrag über Flash im Rahmen des Seminars *Film & Animation* von Tanja Schniederberend:
`http://www-lehre.inf.uos.de/fua/fua04/html/index.html`

Flash-Animation von Andreas Nie & Patrick Tschorn:
`http://www-lehre.inf.uos.de/mmii/flash/Fine_Menue_2.htm`

Trailer zum Universitätsjubiläum von Andreas Nie & Patrick Tschorn:
`http://www.uni-osnabrueck.de/jubilaeum/trailer/trailer.html`



Gesamtansicht des Stadtplans

Teilansicht des Stadtplans

Abbildung 7.8: Rasterfreies Zoomen durch Vektorgrafik

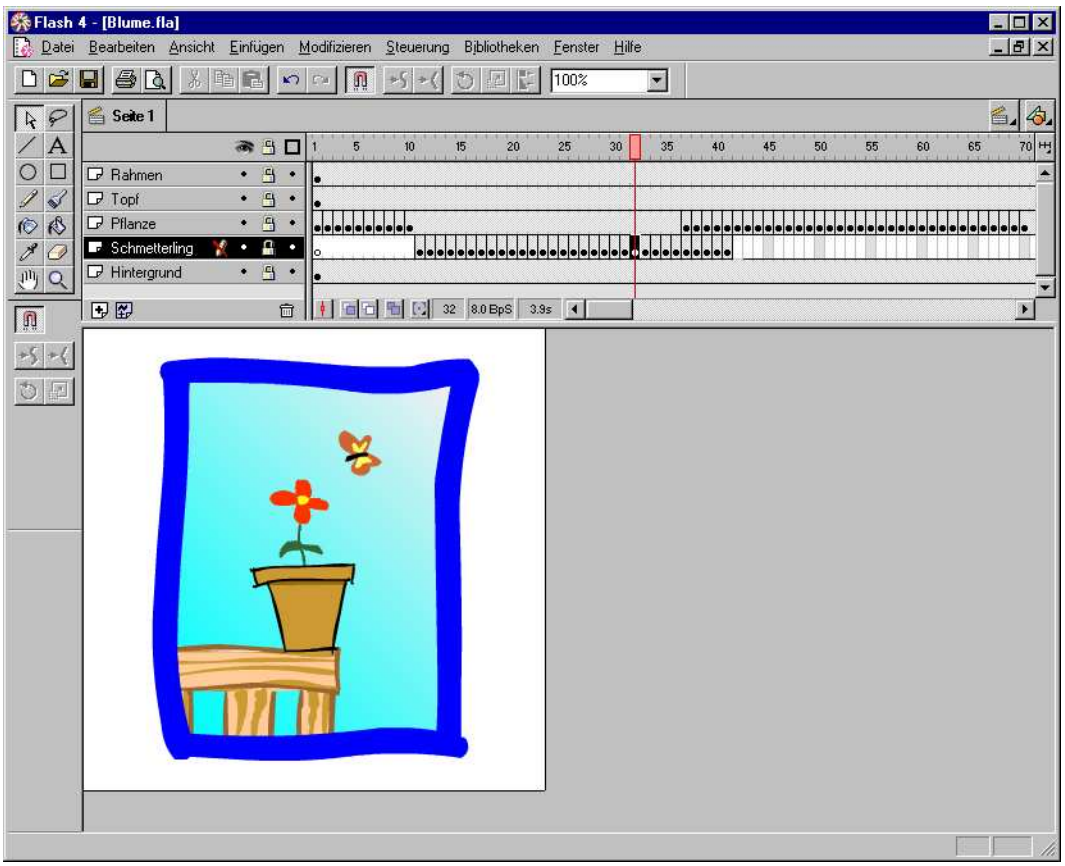


Abbildung 7.9: Screenshot vom Vektorgrafikwerkzeug Macromedia Flash

Kapitel 8

Fraktale

8.1 Selbstähnlichkeit

Viele in der Natur vorkommende Strukturen weisen eine starke Selbstähnlichkeit auf. Beispiele sind Gebirgsformationen, Meeresküsten oder Pflanzenblätter. Solche in sich wiederholende Muster, die beim Hereinzoomen immer wieder zutage treten, lassen sich ausnutzen, wenn man ein umfangreiches Gebilde durch ein kleines Erzeugendensystem darstellen möchte.

Die Produktion von Fraktal-Bildern erfolgt daher durch wiederholte Anwendung einer Transformation f auf einen bestimmten Teil des Bildes.

Abbildung 8.1: Farnblatt

8.2 Koch'sche Schneeflocke

Gegeben ein Polygon. Transformiere jede Polygonkante $\overline{PQ}$ zu einer Folge von Kanten $\overline{PR}$, $\overline{RS}$, $\overline{ST}$, $\overline{TQ}$, wie in Abbildung 8.2 gezeigt.

D.h., R und T dritteln die Kante $\overline{PQ}$, S ist eine 60°-Drehung des Knotens T um das Zentrum R gegen den Uhrzeigersinn. Das so erhaltene Polygon kann erneut transformiert werden.

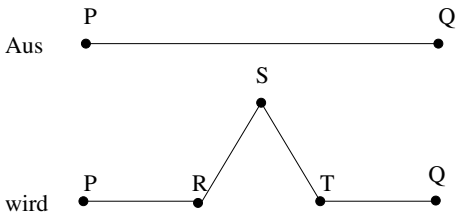
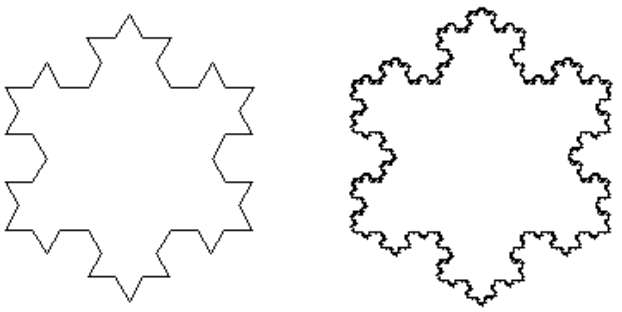


Abbildung 8.2: Iterationsvorschrift zur Koch'schen Schneeflocke



48 Polygonpunkte 3072 Polygonpunkte

Abbildung 8.3: Koch'sche Schneeflocke

8.3 Fraktale Dimension

Ein selbstähnliches Objekt hat *Dimension* D, falls es in N identische Kopien unterteilt werden kann, die jeweils skaliert sind mit dem Faktor $r = \frac{1}{N^{\frac{1}{D}}}$.

Beispiel: Linie hat Dimension 1, denn sie besteht aus N Stücken der Größe $\frac{1}{N}$.

Quadratische Fläche hat Dimension 2, denn sie besteht aus N Flächen der Größe $\frac{1}{N^{\frac{1}{2}}}$, z.B. 9 Teilflächen mit Kantenlängen skaliert um $r = \frac{1}{9^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{3}$

Sind N und r bekannt, läßt sich D bestimmen:
$r = \frac{1}{N^{\frac{1}{D}}} \Rightarrow r \cdot N^{\frac{1}{D}} = 1 \Rightarrow N^{\frac{1}{D}} = \frac{1}{r} \Rightarrow \frac{1}{D} \cdot \log(N) = \log(\frac{1}{r})$
$\Rightarrow D = \frac{\log(N)}{\log(\frac{1}{r})}$

Beispiel: Die Koch'sche Schneeflocke hat Dimension $D = \frac{\log(4)}{\log(3)} = 1.2618$, denn jeder Kantenzug besteht aus $N = 4$ Kopien, jeweils skaliert um den Faktor $r = \frac{1}{3}$.

```
/*************************************************************************/
/*                                                                       */
/*                       Koch'sche Schneeflocke                          */
/*                                                                       */
/*************************************************************************/

private int koch_stern(         // wendet eine Koch-Iteration an auf
        Point poly_punkt[],     // das Polygon poly_punkt
        int poly_punkt_cnt)     // mit poly_point_cnt Punkten
                                // neue Anzahl Punkte wird zurueckgeliefert
{
        int i,j;
        double x0,x1,x2,x3,x4,y0,y1,y2,y3,y4;
        Point[] HPunkt = new Point[MAX_POINTS];
        j=0;

        for (i=0; i < poly_point_cnt; i++)
        {
                x0 = poly_punkt[i].x;
                y0 = poly_punkt[i].y;

                x4 = poly_punkt[(i+1)%(poly_point_cnt)].x;
                y4 = poly_punkt[(i+1)%(poly_point_cnt)].y;

                x1 = (x4-x0)/3+x0;
                y1 = (y4-y0)/3+y0;

                x3 = x4 - (x4-x0)/3;
                y3 = y4 - (y4-y0)/3;

                x2 = (int)(x1+ (x3-x1)*cos_60 - (y3-y1)*sin_60);
                y2 = (int)(y1+ (y3-y1)*cos_60 + (x3-x1)*sin_60);

                HPunkt[j]   = new Point();
                HPunkt[j+1]   = new Point();
                HPunkt[j+2]   = new Point();
                HPunkt[j+3]   = new Point();

                HPunkt[j]        = poly_punkt[i];
                HPunkt[j+1].x        = (int)x1;
                HPunkt[j+1].y        = (int)y1;
                HPunkt[j+2].x        = (int)x2;
                HPunkt[j+2].y        = (int)y2;
                HPunkt[j+3].x        = (int)x3;
                HPunkt[j+3].y        = (int)y3;
                j=j+4;
        }

        for (i=0; i < j; i++)                // neu berechnetes Polygon
                poly_punkt[i] = HPunkt[i];   // kopieren

        return j;                            // neue Anzahl Punkte zurueck
}
```

8.4 Lindenmayer-Systeme

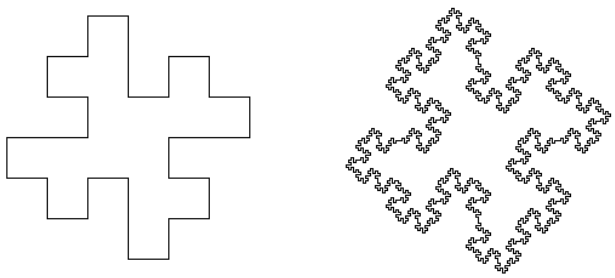
Eine nicht-grafische Beschreibung mancher Fraktale erfolgt mit Lindenmayer-Systemen, kurz L-Systems.
Ein Beispiel für ein L-System ist die quadratische Koch-Kurve:

$$\begin{aligned} &\text{Alphabet } \textstyle\sum = \{r, u, l, d\} \text{ für right, up, left, down} \\ &\text{Regelmenge } f = \{ \quad r \Rightarrow r\ u\ r\ d\ d\ r\ u\ r, \\ &\qquad\qquad\quad u \Rightarrow u\ l\ u\ r\ r\ u\ l\ u, \\ &\qquad\qquad\quad l \Rightarrow l\ d\ l\ u\ u\ l\ d\ l, \\ &\qquad\qquad\quad d \Rightarrow d\ r\ d\ l\ l\ d\ r\ d\ \} \end{aligned}$$

Ausgehend von einem Startwort w wird in jedem Iterationsschritt auf jedes Zeichen von w eine Regel aus f angewandt.
Sei $w = r\ u$. Dann ist $f(w) = r\ u\ r\ d\ d\ r\ u\ r\ u\ l\ u\ r\ r\ u\ l\ u$.

Abbildung 8.4: Anwendung von 2 Regeln eines Lindenmayer-Systems

Ist nach n Iterationen das Wort $f^n(w)$ entstanden, so kann es, zusammen mit dem Parameter n (erforderlich für die Schrittweite), einer Ausgabeprozedur übergeben werden.
Die quadratische Koch-Kurve hat die Dimension $D = \frac{\log(8)}{\log(4)} = 1.5$, denn jeder Kantenzug besteht aus $N = 8$ Kopien, jeweils skaliert um den Faktor $r = \frac{1}{4}$.



32 Polygonpunkte 16384 Polygonpunkte

Abbildung 8.5: L-System

8.5 Baumstrukturen

Gegeben ein "Ast", repräsentiert durch ein 5-seitiges Polygon:

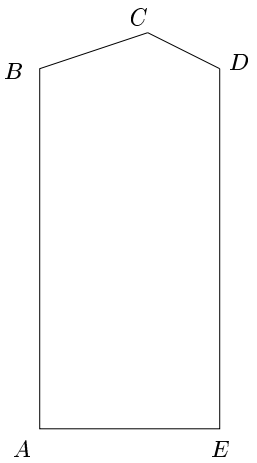
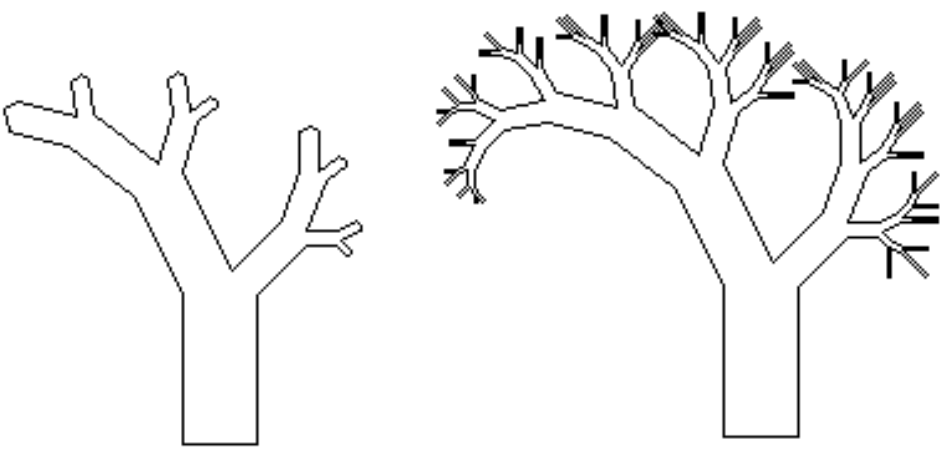


Abbildung 8.6: Ausgangspolygon für Baum

An den Kanten $\overline{BC}$ bzw. $\overline{CD}$ können nun weitere "Äste" als Polygone angesetzt werden, die bzgl. des gegebenen Polygons mit 0.75 bzw. 0.47 skaliert sind. Durch wiederholtes Anstückeln entsteht ein Baum mit immer feinerer Verästelung. Statt dieses deterministischen Verfahrens kann man z.B. die Lage des Punktes C von einem Zufallsparameter beeinflussen lassen.



47 Polygonpunkte 3071 Polygonpunkte

Abbildung 8.7: Vom Baum-Algorithmus erzeugter Baum

```
/*************************************************************************/
/*                                                                       */
/*                              Baum                                     */
/*                                                                       */
/*************************************************************************/

public void baum()             // wendet eine Iteration auf Ansatzstuecke an
        //Point ansatz[],      // alte und neue Folge von Ansatzstuecken
        //int   anzahl,        // Anzahl der Anzsatzstueckendpunkte
        //Point poly_punkt[],  // alte und neue Folge von Polygonecken
        //int   poly_point_cnt // Anzahl der Polygonecken
{
        int i,j,k,p;
        double a,b,l,si_de,co_de;
        Point P;
        Point Q;
        Point A;
        Point B;
        Point C;
        Point[] ast = new Point[3];
        Point[] Hpunkt = new Point[MAX_POINTS];
        Point[] Hansatz = new Point[MAX_POINTS];

        DoublePoint[] schema = new DoublePoint[3];

        ast[0] = new Point();
        ast[1] = new Point();
        ast[2] = new Point();

        schema[0] = new DoublePoint();
        schema[1] = new DoublePoint();
        schema[2] = new DoublePoint();

        schema[0].x = 0.0;                  // generiere Schema
        schema[0].y = 2.0;
        schema[1].x = 2.0/3.0;
        schema[1].y = 7.0/3.0;
        schema[2].x = 1.0;
        schema[2].y = 2.0;

        j=0;                                // Index fuer neue Ansatzstuecke
        k=0;                                // Index fuer neue Polygonpunkte
        for (p=0; p < anzahl; p=p+2)
        {
                P = ansatz[p];
                Q = ansatz[p+1];

                a     = P.y - Q.y;          // bestimme l, sinus, cosinus
                b     = Q.x - P.x;
                l     = Math.sqrt(a*a + b*b);
                si_de = a/l;
                co_de = b/l;
```

```
            for (i=0; i<3; i++)         // fuehre Skalierung und Rotation aus
            {
              ast[i].x = P.x + (int)(l*schema[i].x*co_de-l*schema[i].y*si_de);
              ast[i].y = P.y - (int)(l*schema[i].y*co_de+l*schema[i].x*si_de);
            }

            A = ast[0];                 // kreiere neue Ast-Punkte
            B = ast[1];
            C = ast[2];

            if (anzahl>2) del_line(P, Q); // loesche Ansatzstueck

            set_line(P,A);                // zeichne Figur P,A,B,C,Q
            set_line(A,B);
            set_line(B,C);
            set_line(C,Q);
                                          // speichere neue Ansatzstuecke
            Hansatz[j]          = new Point(A);
            Hansatz[j+1]        = new Point(B);
            Hansatz[j+2]        = new Point(B);
            Hansatz[j+3]        = new Point(C);
            j=j+4;
        }

        i=0;                              // Index fuer altes Polygon
        k=0;                              // Index fuer neues Polygon
        for (p=0; p < anzahl; p=p+2)      // Index fuer alte Ansatzstuecke
        {
            while  ((poly_punkt[i].x !=ansatz[p].x) ||
                    (poly_punkt[i].y !=ansatz[p].y))
                                  // uebernimm unveraenderte Polygonpunkte
                Hpunkt[k++] = poly_punkt[i++];

            Hpunkt[k]   = ansatz[p];      // uebernimm neue Polygonpunke
            Hpunkt[k+1] = Hansatz[2*p];
            Hpunkt[k+2] = Hansatz[2*p+1];
            Hpunkt[k+3] = Hansatz[2*p+3];
            Hpunkt[k+4] = ansatz[p+1];
            k+=4;
            i++;
        }

        while (i < poly_point_cnt) Hpunkt[k++]=poly_punkt[i++];

        for (i=0; i < j; i++)
            ansatz[i] = Hansatz[i];   // neu berechnete Ansatzstuecke kopieren
        anzahl=j;

        for (i=0; i < k; i++)
            poly_punkt[i] = Hpunkt[i];// neu berechnete Polygonpunkte kopieren
        poly_point_cnt=k;
}
```

8.6 Mandelbrot-Menge

Sei z eine komplexe Zahl mit Realteil $z.re$ und Imaginärteil $z.im$:

```
public class Komplex
{
        double re;
        double im;

...
```

Das Quadrat einer komplexen Zahl z hat den Realteil $z.re^2 - z.im^2$ und den Imaginärteil $2 \cdot z.re \cdot z.im$. Der Betrag einer komplexen Zahl c sei $|c| = \sqrt{c.re^2 + c.im^2}$.
Betrachte die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = z^2 + c$ für festes c.

```
Komplex f(Komplex z)
{
        double tmp;

        tmp   = z.re;
        z.re  = z.re * z.re - z.im * z.im + c.re;
        z.im  = 2 * tmp * z.im + c.im;

        return z
}
```

Betrachte die Folge $z, f(z), f^2(z), f^3(z), \ldots$ beginnend bei $z = 0$ für festes c.
Für manche c wächst der Betrag beliebig, für manche c konvergiert er zu einem Fixpunkt. Die *Mandelbrotmenge* besteht aus solchen komplexen Zahlen c, die beim Startwert $z = 0$ zur Konvergenz führen.
Um die Mandelbrotmenge grafisch darzustellen, definiert man

$$\text{farbe}(c) := \begin{cases} \text{schwarz}, & \text{falls die zu } c \text{ gehörende Folge konvergiert} \\ \text{weiß}, & \text{falls die zu } c \text{ gehörende Folge nicht konvergiert} \end{cases}$$

Ordne jedem Pixel $(p.x, p.y)$ des Bildschirms eine komplexe Zahl zu wie folgt. Die linke obere Ecke bezeichne die komplexe Zahl `start` (z.B. $-2.15, 2.15$). Die rechte obere Ecke bezeichne die komplexe Zahl `ende` (z.B. $0.85, 2.15$)
Dann ergibt sich bei 300 Pixeln pro Zeile eine Schrittweite von $(0.85 + 2.15)/300 = 0.01$.
Somit läßt sich ein Koordinatenpaar $(p.x, p.y)$ umrechnen durch den folgenden Konstruktor.

```
public Komplex(Point p, Komplex start, double schritt)
// bildet die komplexe Zahl zum Pixel p mit linker/oberer Ecke start
// und Schrittweite schritt
{
        this.re = start.re + schritt * (double)p.x;
        this.im = start.im - schritt * (double)p.y;
}
```

Sei $(p.x, p.y)$ das zur komplexen Zahl c gehörende Pixel. Dann färbe es mit farbe(c).

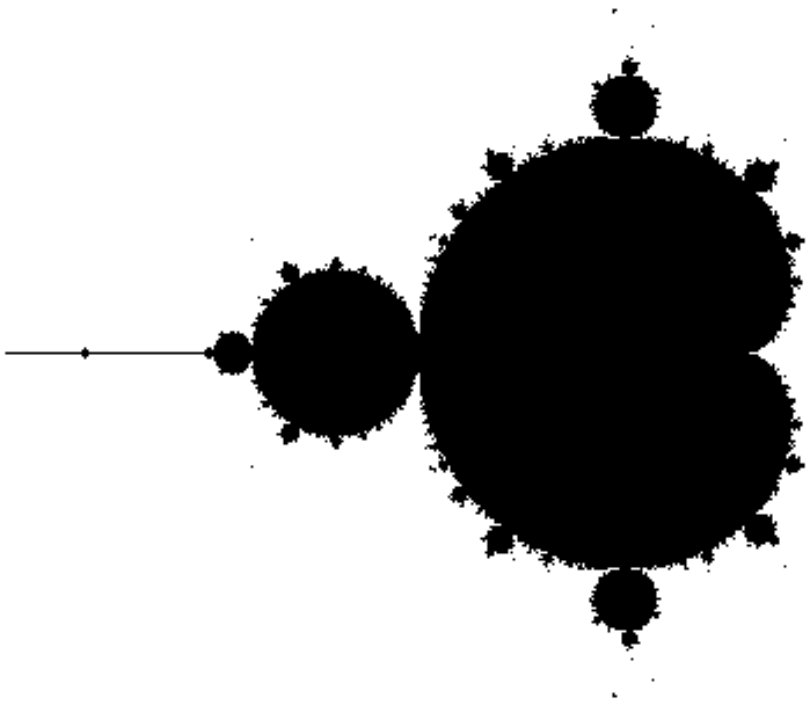


Abbildung 8.8: Mandelbrotmenge: $-2.2 \leq z.re \leq 0.6$, $-1.2 \leq z.im \leq 1.2$, 100 Iterationen

Implementation der Mandelbrot-Menge

Sobald während des Iterierens der Betrag von $z > 2 \Rightarrow$ Folge konvergiert definitiv nicht.
Falls Betrag von z nach z.B. 100 Iterationen noch $< 2 \Rightarrow$ Folge konvergiert vermutlich.
D.h., bei Erreichen einer vorgegebenen Iterationenzahl wird das Pixel, welches der komplexen Zahl c entspricht, schwarz gefärbt, da c vermutlich zur Konvergenz führt.

```
void mandel ()
{
     Point p;
     int zaehler;
     Komplex c, z;

     for (p.x = 0; p.x < WIDTH;  p.x++)
     for (p.y = 0; p.y < HEIGHT; p.y++)
     {
          zaehler = 0;
          c       = new Komplex(p, start, schritt);
          z       = new Komplex(c);

          while ((betrag (z) < 2.0) && (zaehler++ < max_iter))

             z = f(z);

          if (betrag(z) < 2.0) set_pixel(p);
      }
}
```

Bemerkung: Bei Erhöhung der Iterationszahl können einige Pixel weiß werden, da sich herausgestellt hat, daß durch weitere Iterationen die Betragsgrenze 2 überschritten wird. Um die Zahlen c, die nicht zur Konvergenz geführt haben, weiter zu klassifizieren, setzt man

$$\text{farbe}(c) := \begin{cases} \text{schwarz}, & \text{falls konvergiert} \\ \text{weiß}, & \text{falls Iterationszahl nach Überschreiten von Betrag 2 gerade} \\ \text{schwarz}, & \text{falls Iterationszahl nach Überschreiten von Betrag 2 ungerade} \end{cases}$$

Also ergibt sich:

```
if (betrag < 2.0)        set_pixel (p); else
if ((zaehler %  2) != 0) set_pixel (p);
```

Bei Farbbildschirmen gibt es folgende Möglichkeit, die Divergenzgeschwindigkeit der Folge für ein c zu veranschaulichen:

Es seien die Farben `farbe[0], ..., farbe[NUM_COL-1]` vorhanden

```
set_col_pixel (p, farbe [zaehler % NUM_COL])
```

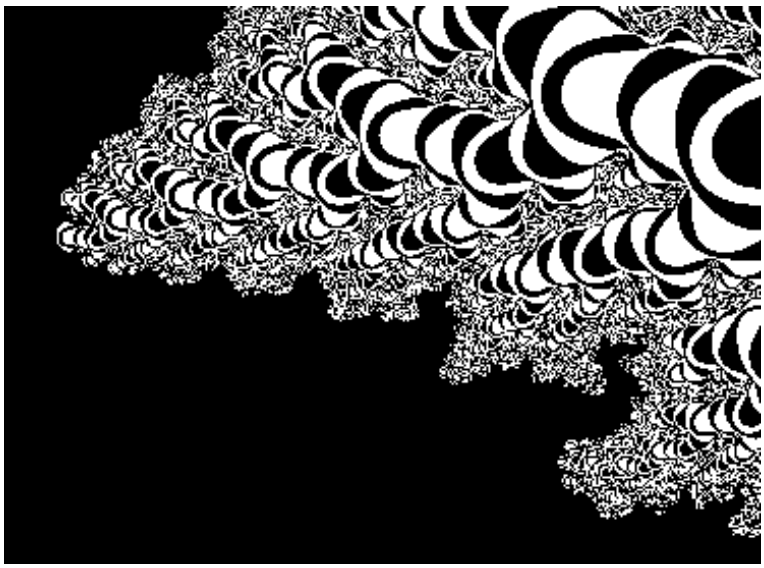


Abbildung 8.9: Mandelbrotmenge: $-1.2548 \leq Re \leq -1.2544$, $0.3816 \leq Im \leq 0.3822$, 100 Iterationen

```
/*****************************************************************************/
/*                          Mandelbrotmenge                                  */
/*****************************************************************************/
void  mandel(                   // berechnet und zeichnet Mandelbrotmenge ab
        Komplex start,          // linker oberer Ecke start der komplexen Flaeche
        double  schritt,        // mit Schrittweite schritt und
        int     max_iter,       // Iterationsanzahl max_iter (muss gerade sein)
        int     fall)           // gemaess Fall fall
                                // Abbruch, wenn Quadrat des Betrags >= 4
                                // oder wenn Iterationszahl erreicht ist
{
    Komplex c = new Komplex(0.0, 0.0);
    Komplex z = new Komplex(0.0, 0.0);
    Point   p = new Point();
    double  q_betrag, tmp;
    int     zaehler ;

    for (p.x = 0, c.re = start.re; p.x < WIDTH;  p.x++, c.re += schritt)
    for (p.y = 0, c.im = start.im; p.y < HEIGHT; p.y++, c.im += schritt)
    {
        z.re = 0.0;
        z.im = 0.0;
        zaehler = 0;
        q_betrag  = 0.0;

        while( (q_betrag < 4.0)  && (zaehler++ < max_iter) ) {
                tmp    = z.re;
                z.re   = z.re * z.re - z.im * z.im + c.re;
                z.im   = 2 * tmp * z.im + c.im;
                q_betrag = z.re*z.re + z.im*z.im;
        }

        switch (fall) {

        case 1: if (q_betrag(z) < 4.0) set_pixel(p); break;       // schwarz

        case 2: if (q_betrag(z) < 4.0) set_pixel(p); else         // schwarz
                if ((zaehler %2) != 0) set_pixel(p); break;       // mit modulo

        case 3: if(zaehler == max_iter+1)
                set_col_pixel(p,farbe[0]); else                   // Mandelbrotmenge
                set_col_pixel(p,farbe[zaehler%NUM_COL]); break;   // farbe modulo
        }
    }
}
```

8.7 Julia-Menge

Gegeben eine komplexe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, z.B. $f(z) = z^2$. Wähle Startwert z_0. Betrachte die Folge $z_0, {z_0}^2, z_0^4, z_0^8, \ldots$. Es gilt:

a) für $|z_0| < 1$ werden die erzeugten Zahlen immer kleiner und konvergieren zum Nullpunkt,

b) für $|z_0| > 1$ werden die erzeugten Zahlen immer größer und laufen gegen unendlich,

c) für $|z_0| = 1$ bleiben die Zahlen auf dem Einheitskreis um den Ursprung, der die Gebiete a) und b) trennt.

Die Menge c) wird *Julia-Menge* genannt. Sie ist invariant bzgl. der komplexen Funktion $f(z)$ und punktsymmetrisch zum Ursprung.

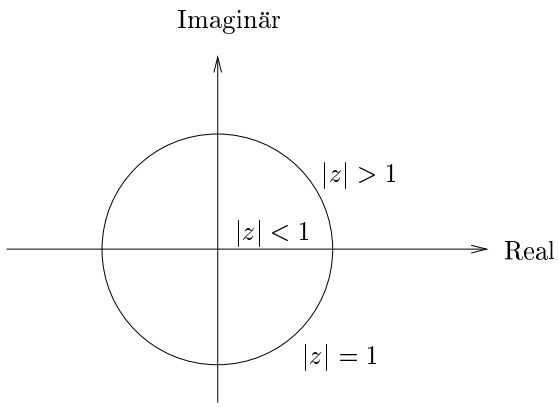


Abbildung 8.10: Julia-Kurve für $f(z) = z^2$

Es gilt: Julia-Menge für $f(z) = z^2 + c$ ist genau dann zusammenhängend, wenn c in der Mandelbrotmenge für $f(z)$ liegt.

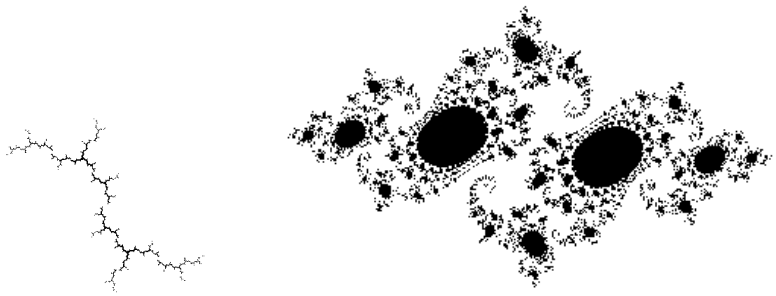


Abbildung 8.11: Vom Julia-Algorithmus erzeugte Bilder mit $c = i$ und $c = 0.746 + 0.112i$

Implementation der Julia-Menge:

1. Möglichkeit: Sei c gegeben. Jeder Wert z der komplexen Fläche wird überprüft, ob er als Startwert zur Konvergenz führt:

```
void  julia_voll(         // berechnet Julia-Menge als gefuelltes Gebiet
        Komplex c,        // fuer komplexes c,
        Komplex start,    // die linke obere Ecke start der komplexen Flaeche,
        double schritt,   // Schrittweite schritt
        int max_iter)     // mit vorgegebener Iterationszahl max_iter
{
        Point p = new Point();
        Point q = new Point();          // Symmetrischer Punkt
        int zaehler ;
        Komplex z;

        for (p.x = 0; p.x <= WIDTH;     p.x++)
        for (p.y = 0; p.y <= HEIGHT/2;  p.y++)
        // Wegen Symmetrie nur bis zur Haelfte laufen
        {
                z = new Komplex(p, start, schritt);

                q.x = WIDTH  - p.x;     // Symmetrie nutzen
                q.y = HEIGHT - p.y;

                zaehler = 0;
                while ((q_betrag(z) < 4.0) && (zaehler++ < max_iter))
                {
                        z = f(z,c);
                }

                if (q_betrag(z) < 4.0)
                {
                        set_pixel(p);
                        set_pixel(q);
                }
        }
}
```

Es gilt: Der Rand der berechneten Fläche stellt die Julia-Menge für c dar.

2. Möglichkeit: *Inverse Iteration Method*:
Aus $f(z) = z^2 + c \Rightarrow f^{-1}(z) = \pm\sqrt{z - c}$

Sei $z = a + b \cdot i$ eine komplexe Zahl. Es gilt:

$$\sqrt{z} = \begin{cases} \pm\left(\sqrt{\frac{|z|+a}{2}} + i \cdot \sqrt{\frac{|z|-a}{2}}\right) & \text{falls } b \geq 0, \\ \pm\left(\sqrt{\frac{|z|+a}{2}} - i \cdot \sqrt{\frac{|z|-a}{2}}\right) & \text{falls } b < 0 \end{cases}$$

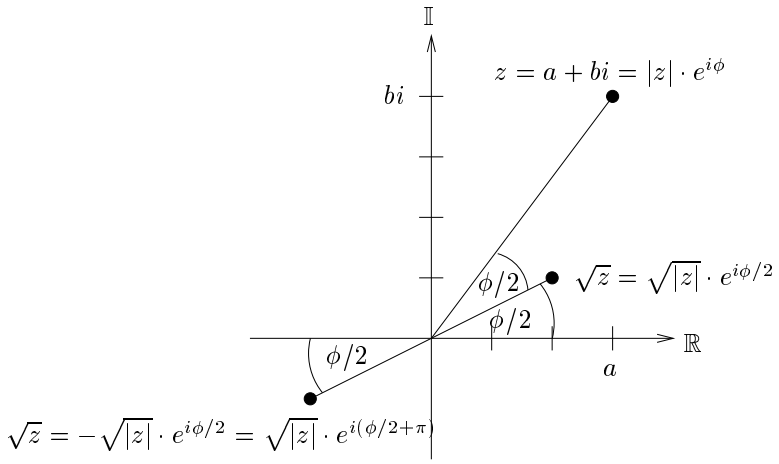


Abbildung 8.12: Zur Berechnung der Wurzel bei der Inverse Iteration Method

Realisiere f^{-1} durch

```
Komplex backward_random (Komplex z, Komplex c)
{
     /* z = z - c */
     /* bestimme r mit r * r = z */
     /* wuerfel das Vorzeichen von r */
     return (r);
}
```

Die Wahl des Vorzeichens bei dieser inversen Iteration erfolgt zufällig.

Ausgehend von $z = 1+0i$ werden zunächst 50 Iterationen $z := f^{-1}(z)$ durchgeführt, um die berechneten Punkte nahe genug an die Julia-Kurve heranzuführen. Iteriere danach weiter $z := f^{-1}(z)$ und zeige jeweils die berechneten z:

```
void julia_rueck(          // berechnet Julia-Menge
        Komplex c,         // fuer komplexes c
        Komplex start,     // linke obere Ecke der komplexen Flaeche
        double schritt,    // Schrittweite
        int anzahl)        // durch anzahl Rueckwaertsspruenge
{
        int k;
        Komplex z = new Komplex(1.0, 0.0);   // Startposition

        for (k=0; k<50; k++)        // tastet sich an die Julia-Kurve heran
            z = backward_random(z,c);


        for (k=0; k < anzahl; k++) {        // bestimme anzahl Vorgaenger
            z = backward_random(z,c);
            set_pixel(z.getPoint(start, schritt)); // und zeichne sie
        }

}
```

8.8 Beispiel-Applet zu Fraktalen

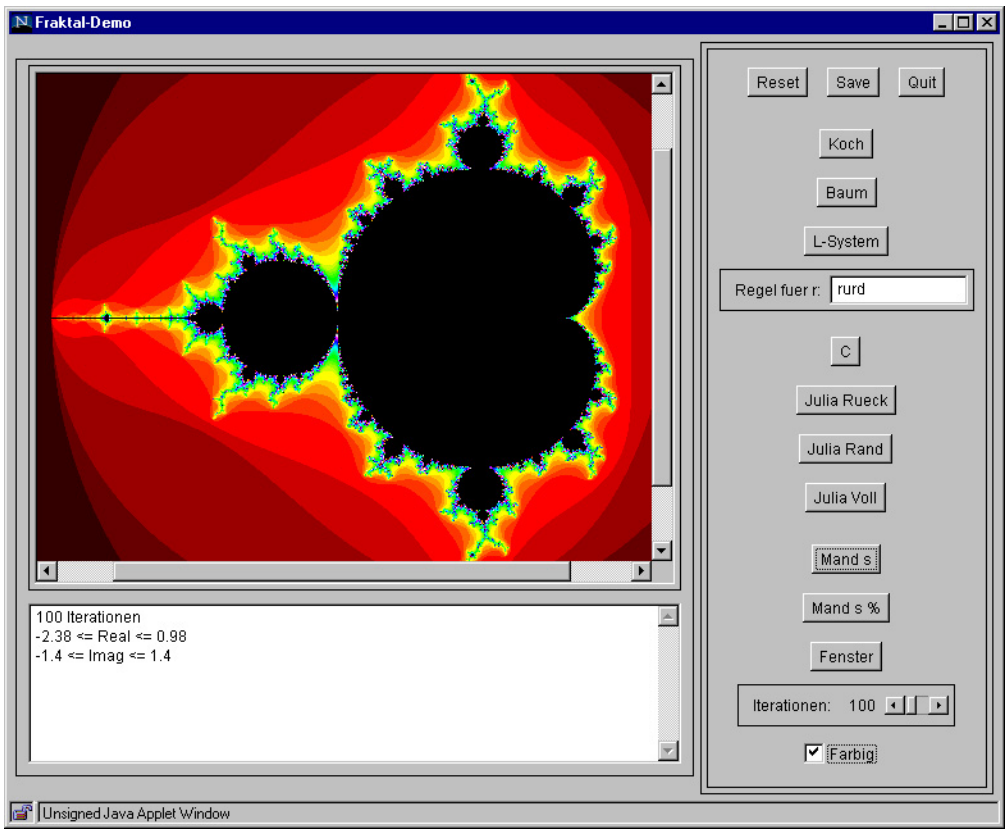


Abbildung 8.13: Screenshot vom Fraktale-Applet

8.9 Iterierte Funktionensysteme

Iterierte Funktionssysteme sind in der Lage, mit wenigen Regeln komplexe, natürlich aussehende Bilder zu erzeugen. Hierbei wird eine Folge von Punkten im $\mathbf{R}^2$ durch fortgesetzte Anwendung von affinen Transformationen durchlaufen. Jede Transformation ist definiert durch eine 2×2- Deformationsmatrix A, einen Translationsvektor b und eine Anwendungswahrscheinlichkeit p, wodurch ein Punkt $\overline{x}$ abgebildet wird auf $A\overline{x} + b$. Zum Beispiel erzeugen folgende 4 Regeln das Farnblatt in Abbildung 8.14 :

	A	b	p
w_1	$\begin{pmatrix} 0.85 & 0.04 \\ -0.04 & 0.85 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0 \\ 10.6 \end{pmatrix}$	85 %
w_2	$\begin{pmatrix} 0.20 & -0.26 \\ 0.23 & 0.22 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0 \\ 10.6 \end{pmatrix}$	7 %
w_3	$\begin{pmatrix} -0.15 & 0.28 \\ 0.26 & 0.24 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0 \\ 4.4 \end{pmatrix}$	7 %
w_4	$\begin{pmatrix} 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.16 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0 \\ 0.0 \end{pmatrix}$	1 %

Abbildung 8.14: Vom Iterierten-Funktionen-System erzeugter Farn

Eine alternative Sichtweise zur Definition eines fraktalen Bildes verlangt die Selbstähnlichkeit von Teilen des Bildes mit dem Ganzen.

D_1	
D_2	D_3

Beispielsweise sei ein Rechteck R gesucht, so daß sich sein Inhalt, jeweils auf ein Viertel verkleinert, im linken oberen, linken unteren und rechten unteren Quadranten wiederfindet. Beginnend mit einem beliebigen Rechteckinhalt werden die 3 Quadranten so lange als skalierte Versionen des Gesamtrechtecks ersetzt, bis wir nahe am Fixpunkt dieser Iterationen angelangt sind. Das Ergebnis ist das sogenannte *Sierpinsky-Dreieck*.

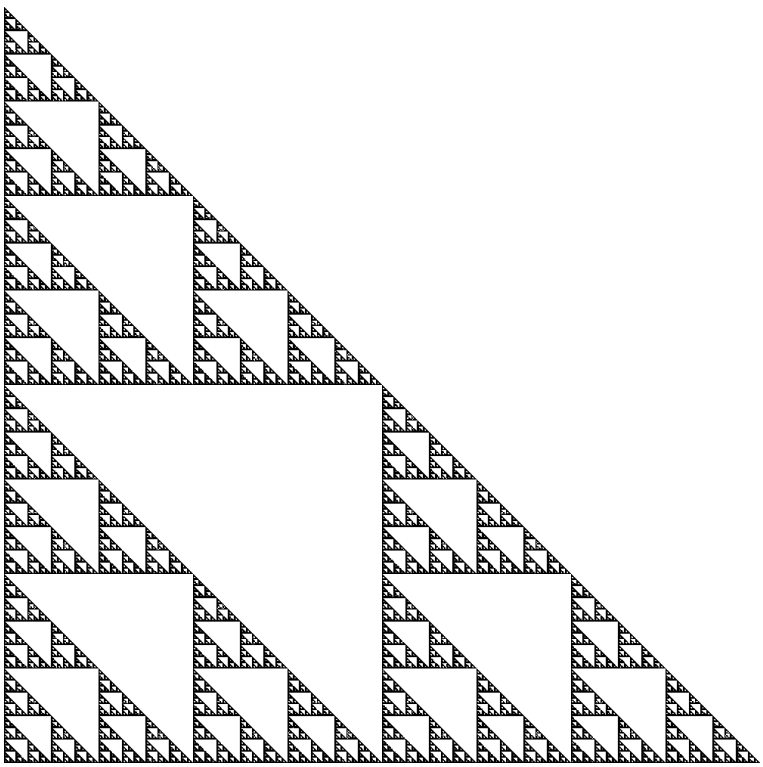


Abbildung 8.15: Sierpinsky-Dreieck

8.10 Beispiel-Applet zu Iterierten Funktionensystemen

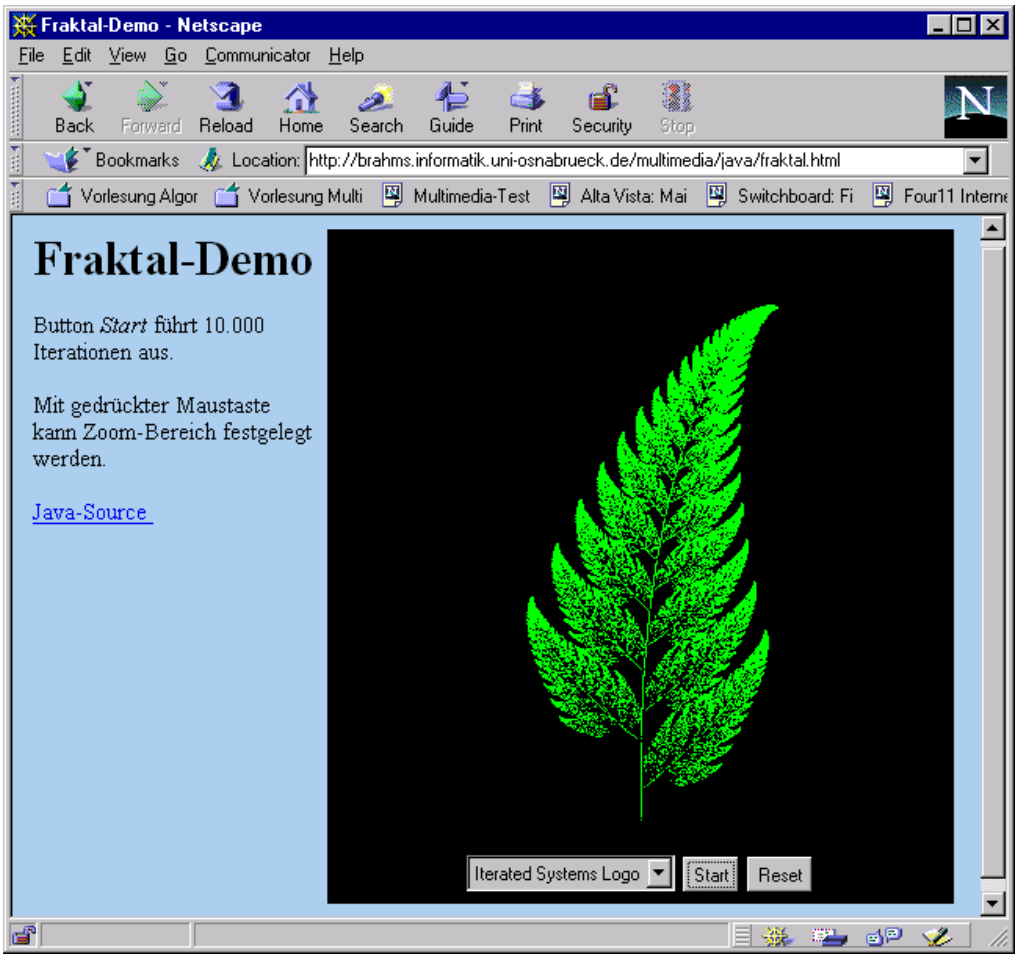


Abbildung 8.16: Screenshot vom Iterierte-Funktionen-Systeme-Applet

```
/*****************************  IFS.java * * ****************************************/
import java.util.Random;

public class IFS {    // Iterated Function System zur Erzeugung eines fraktalen Farns

  final static double [][][][] a = {                    // affine Abbildungen
     {{{ 0.85,  0.04}, {-0.04, 0.85}},                  // fuer Farn
      {{ 0.20, -0.26}, { 0.23, 0.22}},
      {{-0.15,  0.28}, { 0.26, 0.24}},
      {{ 0.00,  0.00}, { 0.00, 0.16}}},

     {{{0.5,  0.0}, {0.0,  0.5}},                       // fuer Sierpinski
      {{0.5,  0.0}, {0.0,  0.5}},
      {{0.5,  0.0}, {0.0,  0.5}}},
```

```
     {{{0.49, 0.01}, {0.0, 0.62}},                    // fuer Blatt
      {{0.27, 0.52}, {-0.40, 0.36}},
      {{0.18, -0.73}, {0.50, 0.26}},
      {{0.04, -0.01}, {0.50, 0.0}}}
  };

  final static double [][][] b = {                    // Translationsvektoren
        {{0.0, 10.6 },                                // fuer Farn
         {0.0, 10.6},
         {0.0,  4.4 },
         {0.0,  0.0 }},

        {{0.0, 0.0},                                  // fuer Sierpinski
         {50.0, 0.0},
         {0.0, 50.0}} ,

        {{25.0, 2.0},                                 // fuer Ahorn-Blatt
         { 0.0, 56.0},
         {88.0, 8.0},
         {52.0, 32.0}}
  };

  final static int [][] prob = {                      // Regelwahrscheinlichkeiten
        {85, 7, 7, 1},                                // fuer Farn
        {33, 33, 34},                                 // fuer Sierpinski
        {25, 25, 25, 25}                              // fuer Ahorn-Blatt
  };

  static Random r = new Random((long)42);

  public static int wuerfel(int sys) {                // wuerfelt eine Regel gemaess
    int k, sum;                                       // ihrer Wahrscheinlichkeit
    int w  = r.nextInt() % 100;
    w = w < 0 ? 1-w : 1+w;                            // 1 <= w <= 100
    sum = prob[sys][0]; k = 0;
    while (sum < w) sum +=prob[sys][++k];
    return k;
  }

  public static void transform ( Punkt p, int sys )   // transformiere Punkt p
  {
    int k;
    double x, y;

    k = wuerfel(sys);                                 // wuerfel eine Regel

    x = a[sys][k][0][0]*p.x +a[sys][k][0][1]*p.y + b[sys][k][0]; // bestimme
    y = a[sys][k][1][0]*p.x +a[sys][k][1][1]*p.y + b[sys][k][1]; // neuen Punkt
    p.x = x;
    p.y = y;
  }
}
```

Kapitel 9

Farbe

9.1 Physik

Ein Teil des elektromagnetischen Spektrums wird vom Auge wahrgenommen:

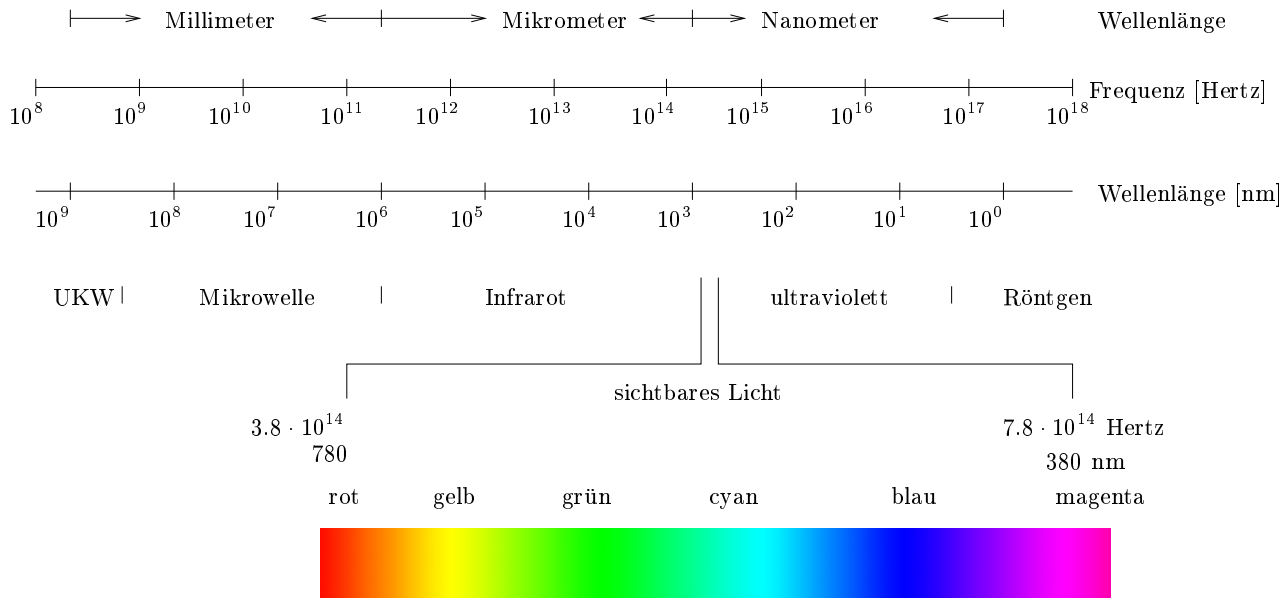


Abbildung 9.1: Elekromagnetisches Spektrum

Es gilt:

- Wellenlänge · Frequenz = Lichtgeschwindigkeit ($= 2.998 \cdot 10^8$ m/s).
- Spektralfarben bestehen aus Licht einer einzigen Wellenlänge.
- In der Natur vorkommende Farben bestehen aus Licht, das aus verschiedenen Wellenlängen zusammengesetzt ist.
- Die Verteilung der Wellenlängen bezeichnet man als Spektrum.

9.2 Dominante Wellenlänge

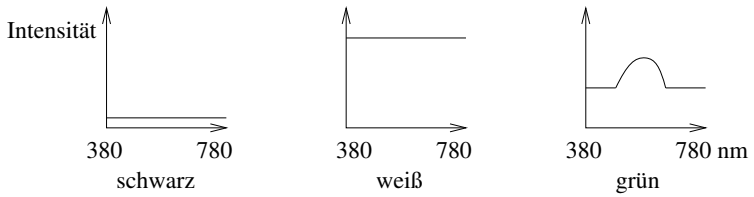


Abbildung 9.2: Spektren zu drei Farben

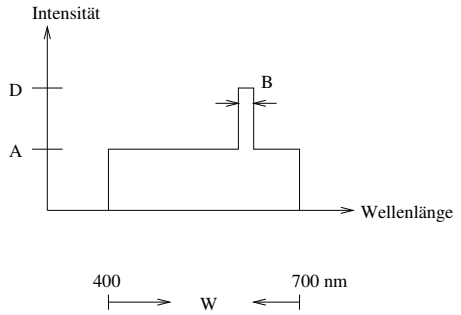


Abbildung 9.3: Dominante Wellenlänge

Eine mögliche Charakterisierung für den Farbeindruck lautet:

hue: Farbton, gegeben durch dominante Wellenlänge.

luminance: Helligkeit $= L = (D - A) \cdot B + A \cdot W$

saturation: Sättigung, Reinheit, gegeben durch das Verhältnis der Fläche im "Turm" zur Gesamtfläche $= \frac{(D-A)\cdot B}{L}$.

Je weiter A und D auseinanderliegen, desto größer ist die Sättigung, d.h. desto reiner ist die Farbe. Bei $A = 0$ liegt nur die dominante Wellenlänge vor. Bei $A = D$ liegt weißes Licht vor.

Der Mensch kann etwa 128 reine Farbtöne unterscheiden. Pro Farbton können etwa 20 Sättigungsgrade unterschieden werden.

9.3 Grundfarben

Beobachtung: Durch Mischen (= Addieren) von Farben entstehen neue Farben. Wähle 3 Grundfarben, z.B. Rot (R), Grün (G), Blau (B). Bei einer Normierung $R + G + B = 1$ läßt sich jede Kombination durch Angabe von zwei Parametern (siehe Abbildung 9.4) beschreiben (da z.B. B aus R und G folgt).

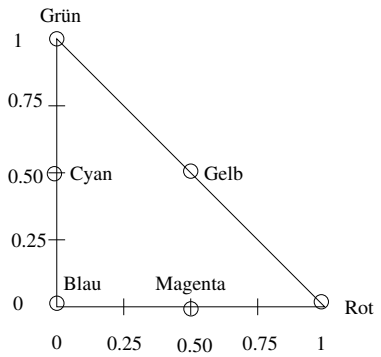


Abbildung 9.4: 2-dimensionale Beschreibung von Farbtönen

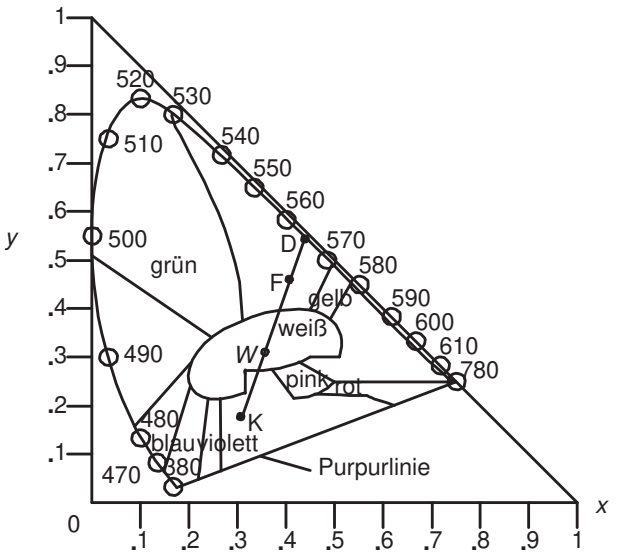


Abbildung 9.5: CIE-Farbdiagramm des sichtbaren Spektrum, Angaben zur Wellenlänge in nm

Abbildung 9.5 zeigt den im Jahre 1931 definierten CIE-Standard (*Commision Internationale l'Éclairage*), in dem drei (künstliche) Grundfarben festgelegt wurden, die alle sichtbaren Farben erzeugen können.

Die Grundfarben eines typischen Farbbildschirms haben die (x, y)-Koordinaten

$$\begin{aligned} \text{Rot} &= (0.628, 0.346), \\ \text{Grün} &= (0.268, 0.588), \\ \text{Blau} &= (0.150, 0.070). \end{aligned}$$

Die Reinheit der Farbe F ist der relative Abstand von F zu W, bezogen auf die Strecke $\overline{WD}$, wobei D den Schnittpunkt der Geraden durch W und F mit der Kurve bildet. D ist die dominante Wellenlänge in F. Das Komplement K der Farbe F ergibt sich durch Spiegelung von F an W mit entsprechender Skalierung.

9.4 RGB-Modell (Rot, Grün, Blau), (additiv)

Zur Ansteuerung der dreifarbigen Phosporschicht mit roten, grünen, blauen Phosphorpunkten bietet sich das RGB-Modell an. Es handelt sich um ein additives Farbmodell, da das von den Phosphorpunkten ausgehende Licht addiert wird.
Typische Darstellung durch Einheitswürfel:

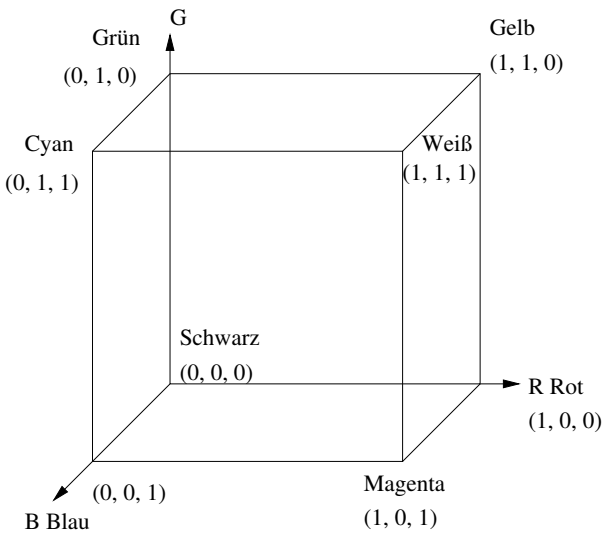


Abbildung 9.6: RGB-Würfel

Häufig werden die drei RGB-Werte statt im reellen Wertebereich $[0, 1]$ in 256 Abstufungen als ganze Zahlen im Bereich $\{0, 1, ..., 255\}$ angegeben, die in einem Byte kodiert werden. Dadurch ergibt sich die Darstellung einer Farbe in drei RGB-Bytes.

9.5 CMY-Modell (Cyan, Magenta, Yellow), (subtraktiv)

Bei Farbdrucken empfängt das Auge nur solche Anteile des weißen Lichts, die reflektiert werden. Es bietet sich daher ein subtraktives Modell an.
Ein CMY-Tripel beschreibt, wieviel von den Grundfarben Cyan, Magenta, Yellow reflektiert bzw. von den Grundfarben Rot, Grün, Blau absorbiert wird.

Es gilt:	$(0, 0, 0)$	absorbiert nichts	bleibt Weiß
	$(0, 0, 1)$	absorbiert Blau	bleibt Gelb
	$(0, 1, 0)$	absorbiert Grün	bleibt Magenta
	$(1, 0, 0)$	absorbiert Rot	bleibt Cyan
	$(0, 1, 1)$	absorbiert Cyan	bleibt Rot
	$(1, 0, 1)$	absorbiert Magenta	bleibt Grün
	$(1, 1, 0)$	absorbiert Gelb	bleibt Blau
	$(1, 1, 1)$	absorbiert alles	bleibt Schwarz

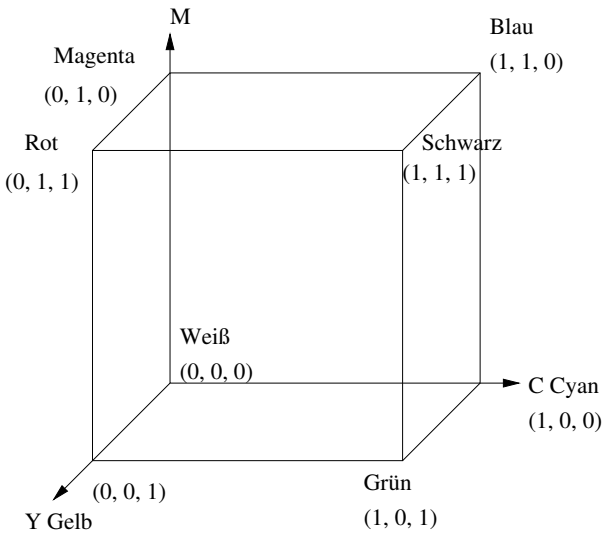


Abbildung 9.7: CMY-Würfel

Beispiel:	$(0,1,0)$ Magenta	gemischt mit	$(0,0,1)$ Gelb	ergibt	$(0,1,1)$ Rot
	$(1,0,0)$ Cyan	gemischt mit	$(0,0,1)$ Gelb	ergibt	$(1,0,1)$ Grün
	$(1,0,0)$ Cyan	gemischt mit	$(0,1,0)$ Magenta	ergibt	$(1,1,0)$ Blau

Die Umrechnung zwischen dem CMY- und dem RGB-Modell erfolgt in Vektorschreibweise über die Subtraktionen

$$\begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S \\ S \\ S \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} C \\ M \\ Y \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} C \\ M \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W \\ W \\ W \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix}$$

wobei die Vektoren $[S,S,S]$ im CMY-Modell und $[W,W,W]$ im RGB-Modell gleich $[1,1,1]$ sind.

9.6 Das YIQ-Modell

Beim 1953 in den USA eingeführten *NTSC-System* (National Television Standards Committee) werden die Farben durch die Farbparameter *YIQ* beschrieben, wobei Y die Helligkeit darstellt. Die Umrechnung zum RGB-Modell erfolgt durch die Formeln

$$\begin{pmatrix} Y \\ I \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} .299 & .587 & .114 \\ .596 & -.274 & -.322 \\ .211 & -.522 & .311 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0.956 & 0.623 \\ 1 & -0.272 & -0.648 \\ 1 & -1.105 & 1.705 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Y \\ I \\ Q \end{pmatrix}$$

Beim europäischen *PAL-System* (Phase Alternating Line) werden statt der Parameter I und Q die Farbdifferenzen $R - Y$ und $B - Y$ übertragen.

Die Konvertierung der Farbinformation in Monochrom-Darstellung erfolgt in beiden Systemen durch Auswertung des Helligkeitsparameters Y.

9.7 YUV-Modell

Ein Farbwert wird beschrieben durch ein YUV-Tripel, wobei Y die Helligkeit (Luminanz) bezeichnet und U, V Farbdifferenzen (Chrominanz). Die Helligkeitsempfindung resultiert zu 59 % aus dem Grünanteil, zu 30 % aus dem Rotanteil und zu 11 % aus dem Blauanteil:

$$Y = 0.299 \cdot R + 0.587 \cdot G + 0.114 \cdot B$$

In den Farbdifferenzen (mit historisch begründeten Normierungsfaktoren) ist die restliche Information codiert:

$$\begin{aligned} U &= 0.493 \cdot (B - Y) \\ V &= 0.877 \cdot (R - Y) \end{aligned}$$

Der Vorteil dieses Farbmodells liegt darin begründet, daß in der Y-Komponente das Bild als Matrix von Grauwerten vorliegt und ggf. separat von der Farbinformation weiterverarbeitet werden kann.

9.8 HSV-Modell

Zur intuitiven Beschreibung einer Farbe eignet sich das HSV-Modell, welches jede Farbe durch ein Tripel

- Hue = Farbton
- Saturation = Sättigung
- Value = Helligkeit

beschreibt.

Projiziere den RGB-Würfel längs der Weiß-Schwarz-Diagonale (Abbildung 9.8).

Dieses Sechseck bildet die Basis einer Pyramide. Die Wahl des Farbtons (hue) geschieht durch Angabe eines Winkels (0° = Rot).

Der Parameter V liegt zwischen 0 und 1 und bestimmt die Intensität der Farbe (dargestellt durch die Senkrechte). Der Parameter S liegt zwischen 0 und 1 und bestimmt die Reinheit der Farbe (Entfernung von der Senkrechten). Die Farbselektion kann erfolgen, indem z.B. zunächst eine reine Farbe ausgewählt wird ($H = \alpha, V = 1, S = 1$). Das Hinzumischen von Weiß zur Erzeugung von Pastellfarben erfolgt durch Reduktion von S bei konstantem V. Das Hinzumischen von Schwarz (zur Erzeugung von dunklen Farben) erfolgt durch Reduktion von V bei konstantem S.

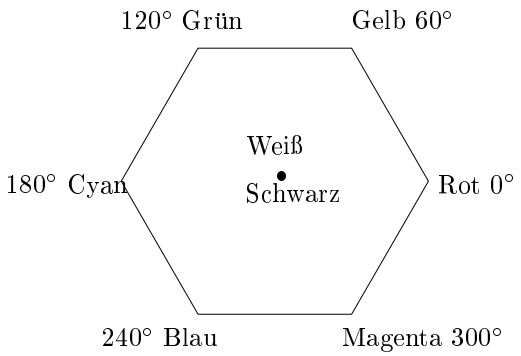


Abbildung 9.8: Gradeinteilung für Farbtöne im HSV-Modell

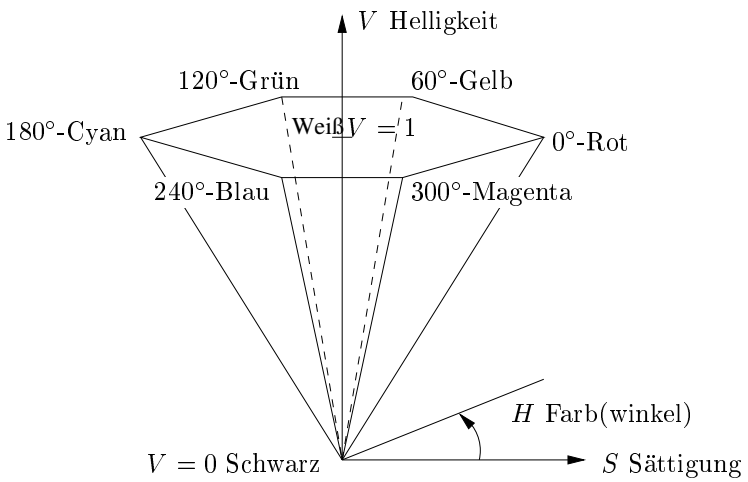


Abbildung 9.9: HSV-Modell

Umrechnung von RGB nach HSV

Die Achse V entspricht der Diagonalen im RGB-Würfel durch die Punkte Schwarz und Weiß, deshalb ist der Wert für V gleich dem Maximum der RGB-Intensitäten. Die Werte H und S können aus der Position des Punktes in jenem Sechseck berechnet werden, das durch Projektion des kleinsten, den RGB-Punkt beinhaltenden Würfels erzeugt wird.

Beispiel: Welche HSV-Darstellung haben die RGB-Bytes (64, 128, 32)?
Im RGB-Einheitswürfel entspricht dies

$$\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right) .$$

$$\begin{array}{lcllcl} v & = & \max(r,g,b) & = & \frac{1}{2} & = 50\ \% \\ mi & := & \min(r,g,b) & = & \frac{1}{8} & \\ s & = & \dfrac{v-mi}{v} & = & \frac{\frac{3}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4} & = 75\ \% \end{array}$$

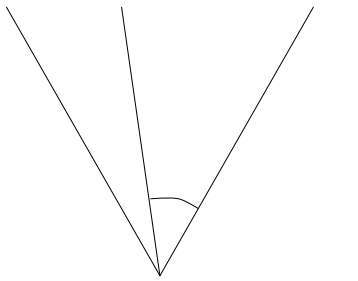
Die dominante Grundfarbe ist Grün, da $v = g$.
Am schwächsten ist Blau vertreten, da $mi = b$.
$\Rightarrow$ Farbe im Bereich Gelb ... Grün
$\Rightarrow h = 60° \ldots 120°$.

$$h = \left(1 + \frac{v-r}{v-mi}\right) \cdot 60° = \left(1 + \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{8}}\right) \cdot 60° = \left(1 + \frac{2}{3}\right) \cdot 60° = 100°$$

Umrechnung von HSV nach RGB

Beispiel: Wie lauten die RGB-Bytes (Werte zwischen 0 und 255) für den Farbton 100° bei 75 % Sättigung und 50 % Helligkeit?

Farbton =	Grün	?	Gelb
h =	120°	100°	60°
RGB =	(0, 1, 0)	?	(1, 1, 0)



$$\begin{array}{lcccccc} f & = & \text{Winkel}/60 & - & \text{Winkel div } 60 & & \\ & = & \frac{5}{3} & - & 1 & = & \frac{2}{3} \end{array}$$

		R	G	B		R	G	B	
Farbton h	:	$1-f$	1	0	$\Rightarrow$	$\frac{1}{3}$	1	0	für $f = \frac{2}{3}$
Sättigung s	:	$1 - s \cdot f$	1	$1-s$	$\Rightarrow$	$1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{4}$	für $s = \frac{3}{4}$
Helligkeit v	:	$v \cdot (1 - s \cdot f)$	v	$v \cdot (1-s)$	$\Rightarrow$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	für $v = \frac{1}{2}$
Lösung:						64	128	32	

9.9 HLS-Modell

Das HLS-Modell (hue, lightness, saturation) ist dem HSV-Modell ähnlich. Die Farbe (hue) wird ebenfalls als Winkel in einem Farbenkreis angegeben. Die Reihenfolge der Farben auf diesem Kreis ist zwar identisch der beim HSV-Modell, jedoch liegt beim HLS-Modell die Farbe Blau bei 0°, d.h. um 120° verdreht.

Auch der Parameter S(aturation) entspricht dem HSV-Modell und liegt ebenfalls im Bereich $[0, 1]$. Der Wert $S = 1$ entspricht maximaler Reinheit, und für $S = 0$ erhält man die Grauskala.

Der Parameter L(ightness) entspricht in etwa dem Parameter V(alue), wobei allerdings aus der Pyramide durch "Hochziehen" des Punktes $S = 0$, $V = 1$ ein Doppelkegel entsteht. Die Werte $L = 0$ und $L = 1$ beschreiben die Farben Schwarz und Weiß, und die Farben maximaler Sättigung liegen auf der Ebene durch $L = 0.5$.

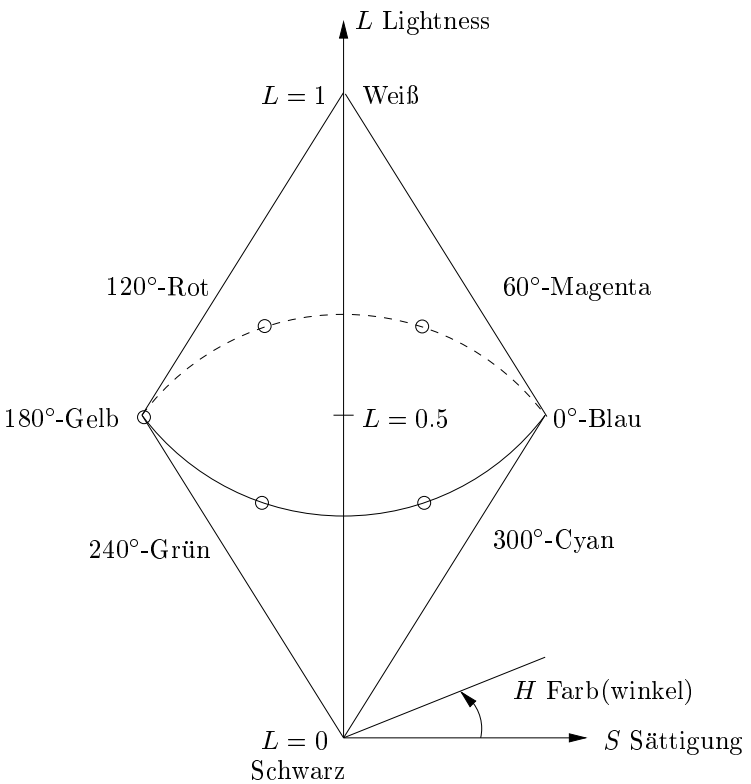


Abbildung 9.10: HLS-Modell

Bemerkung

Die lineare Interpolation zwischen zwei Farben geschieht beim RGB-, CMY-, YIQ- und YUV-Modell längs der Verbindungsstrecke zwischen diesen Farben im dreidimensionalen Farbraum. Im allgemeinen ist dies aber beim HSV- und HLS-Modell nicht der Fall.

9.10 Color Data Base

In einer Datenbank sind Byte-Tripel abgelegt zu einer Auswahl von Farbbeschreibungen, z.B.

```
205   92   92  indian red
124  252    0  lawn green
 25   25  112  midnight blue
210  105   30  chocolate
```

9.11 CNS

Zur verbalen Beschreibung einer Farbe eignet sich das CNS-Modell (*Color Name System*).

Zur Beschreibung des Farbtons verwende *red*, *orange*, *yellow*, *green*, *blue*, *purple*. Zur Beschreibung der Sättigung verwende *grayish*, *moderate*, *strong*, *vivid*. Zur Beschreibung der Helligkeit verwende *very dark*, *dark*, *medium*, *light*, *very light*.

Die achromatische Skala besteht aus den sieben Grautönen *black*, *very dark gray*, *dark gray*, *gray*, *light gray*, *very light gray*, *white*.

9.12 Color Table (Farbtabelle)

In einem Digitalrechner erwartet der Video-Controller die Farbinformation als Byte-Tripel. Aus Platzgründen können nicht immer für jedes Bildschirmpixel 3 Bytes gespeichert werden. Statt dessen speichert man pro Pixel einen Index, bestehend aus p Bits, mit dem man ein RGB-Byte-Tripel aus der Color Table referieren kann.

Beispiel: $p = 2$, d.h. $2^2 = 4$ Farben gleichzeitig darstellbar.

Index	R	G	B	
0	255	0	0	Rot
1	0	255	0	Grün
2	0	0	255	Blau
3	255	255	0	Gelb

Die Color Table kann verwendet werden, um mehrere Bilder dynamisch zu überlagern und wieder zu trennen, ohne die Bilder neu zu zeichnen.

Beispiel: In ein farbiges Bild mit den 8 Farben Schwarz, Grau, Rot, Gelb, Grün, Cyan, Blau, Magenta soll eine Grafik, bestehend aus weißen Linien, ein- und ausgeblendet werden. Pro Pixel seien 4 Bits als Index in der Color Table vorgesehen: Das vorderste Bit beschreibt die weiße Grafik, die hinteren 3 Bits beschreiben die Farbe.

Index	R	G	B	
0000	255	255	255	
0001	255	255	255	
0010	.	.	.	
0011	.	.	.	
0100	.	.	.	
0101	.	.	.	
0110	.	.	.	
0111	255	255	255	
1000	0	0	0	Schwarz
1001	150	150	150	Grau
1010	255	0	0	Rot
1011	255	255	0	Gelb
1100	0	255	0	Grün
1101	0	255	255	Cyan
1110	0	0	255	Blau
1111	255	0	255	Magenta

Offenbar werden alle Pixel mit vorderstem Bit= 0 weiß gezeichnet, alle Pixel mit vorderstem Bit= 1 erhalten die zugewiesene Farbe. Kopiert man nun die untere Hälfte der Color Table in die obere Hälfte, so verschwindet die weiße Grafik. Setzt man die obere Hälfte der Color Table auf Weiß, erscheint die Grafik wieder. Der Aufwand hängt nur von der Größe der Farbtabelle ab, nicht von der Größe der Bilder.
Die Color Table kann auch zur Animation verwendet werden.

Beispiel: Ein (beliebig komplexes) Objekt der Farbe Grün soll sich zyklisch über 15 disjunkte Positionen bewegen. Beschreibe die Szene wie folgt:
Alle Pixel des Objekts in Lage i erhalten den Index i.
Alle Pixel des Hintergrunds erhalten den Index 15.
Die Color Table ist für alle Einträge mit der Hintergrundfarbe geladen. Das Objekt taucht bei Position i auf durch `color_table[i] :=` Objektfarbe. Es verschwindet von Position i durch `color_table[i] :=` Hintergrundfarbe.

Bei sich überlagernden Objekten wird für jede Position eine Bit-Plane benötigt: Alle Pixel des Objekts in Lage i setzen das i-te Bit in ihrem Index auf 1. Das Objekt wird bei Position i sichtbar, indem für Indizes mit i-tem Bit $= 1$ die Objektfarbe gesetzt wird.

Die Anzahl der Bit-Planes entspricht der Anzahl der Bits im Index.

Darstellung eines True-Color-Bildes auf einem 8-Bit-Farbschirm

Es wird eine Farbtabelle initialisiert, die einem $6 \times 6 \times 6$ RGB-Würfel entspricht. D.h. auf insgesamt 216 Einträge verteilt befindet sich das Farbspektrum mit je 6 verschiedenen Rot-, Grün- und Blau-Abstufungen. Jedem RGB-Tripel des True-Color-Bildes wird der Index des nächstgelegenen Farbeintrags zugeordnet. Hierzu wird der Bereich $0 \ldots 255$ in 6 Intervalle partitioniert, denen ein quantisierter Wert zugeordnet ist:

x	0 ... 25	26 ... 76	77... 127	128 ... 178	179 ... 229	230 ... 255
$q(x)$	0	51	102	153	204	255

$$q(x) := \left\lfloor \frac{x + 25}{51} \right\rfloor \cdot 51$$

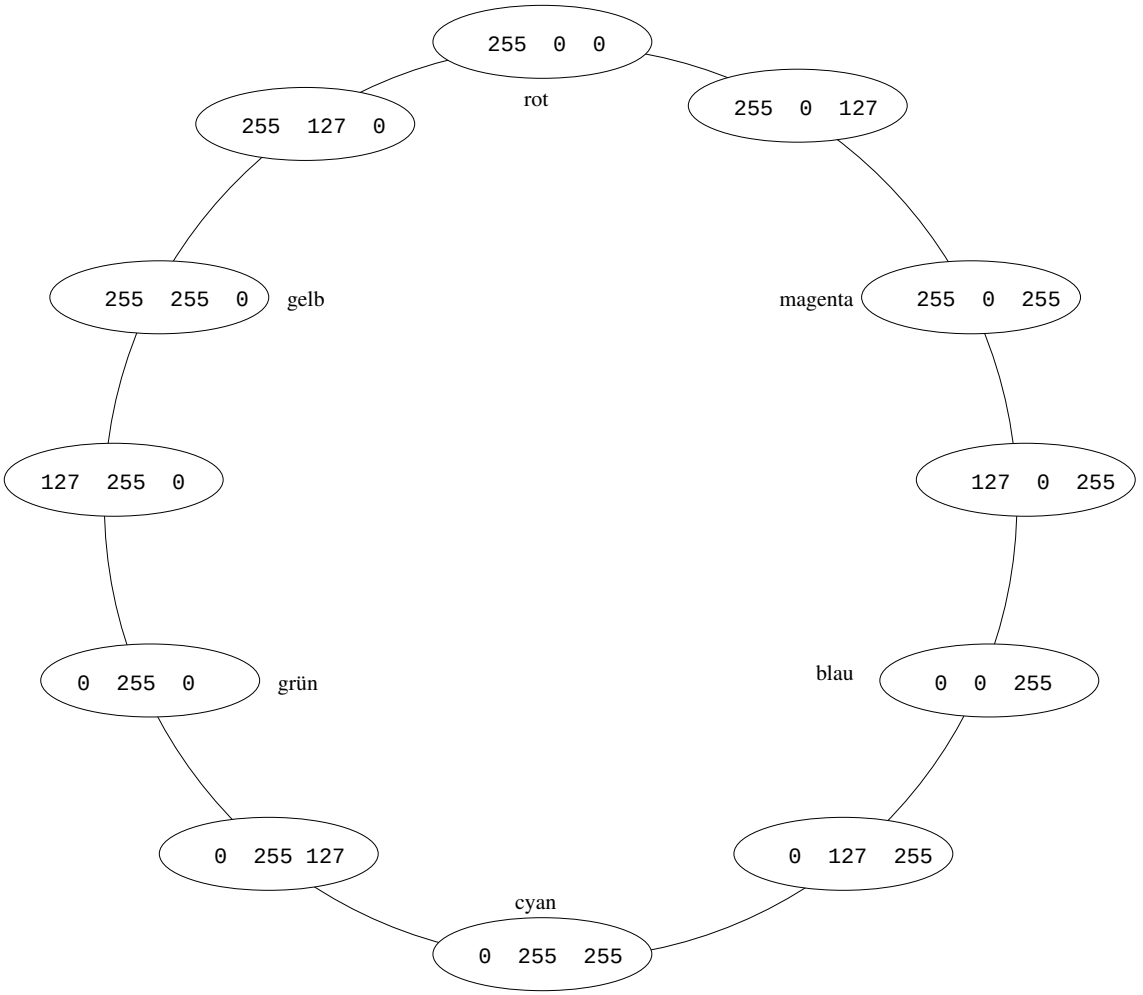


Abbildung 9.11: 12 typische Eintrage einer Farbtabelle fur einen Bildschirm mit 4 Bit Farbtiefe

Hi-Color-Modus

Beim Hi-Color-Modus werden die Rot-, Grün-, Blauanteile eines Pixels durch den Grafikkartentreiber auf $5+6+5 = 16$ Bit gerundet, d.h., die letzten 3 bzw. 2 Bit werden abgeschnitten. Der resultierende 2 Byte lange Index wird im Bildspeicher abgelegt. Beim Auslesen läßt sich daraus unmittelbar ein Spannungstripel erzeugen, eine Farbtabelle wird nicht benötigt. Es sind also $2^{16} = 65536$ Farben gleichzeitig darstellbar.

Beim Einlesen eines Palettenbildes wird jedem Bildpunkt der 2-Byte Index zugeordnet, der sich nach Rundung des referierten Farbtabelleneintrags ergibt. Danach wird die Farbtabelle nicht mehr benötigt.

9.13 Beispiel-Applet zu Farbe

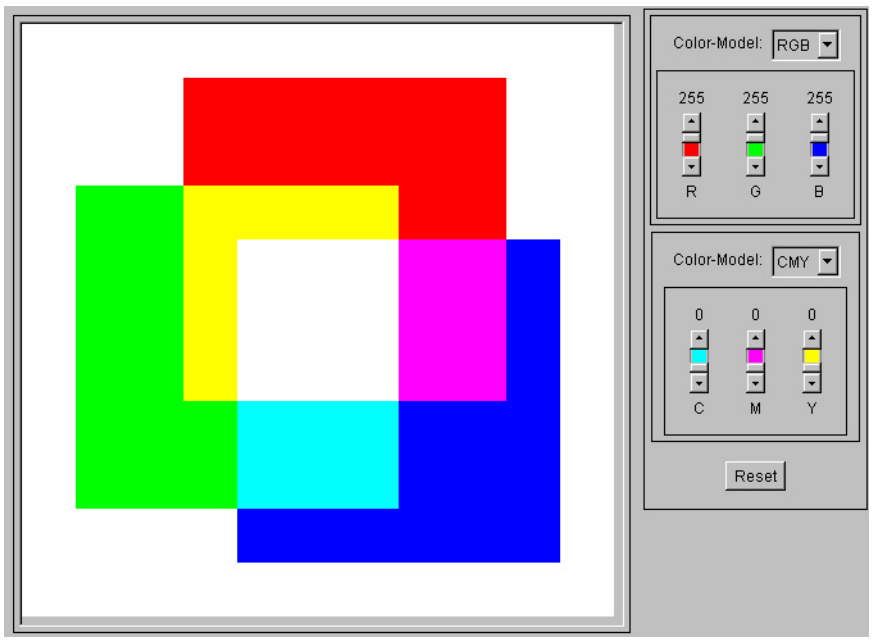


Abbildung 9.12: Screenshot vom Farben-Applet

Kapitel 10

Pixeldateiformate

10.1 TIF

Eines der häufig verwendeten Dateiformate zur Speicherung von Pixelbildern wurde von Aldus Corporation, Seattle, USA, entwickelt: *Tag Image File Format*, abgekürzt TIF.

Dateikopf:	1. Wort	`4d4d` Motorola (high order first) `4949` Intel (low order first)
	2. Wort	`002a` Versionsnummer (konstant)
	3. + 4. Wort	Offset des ersten IFD (Image File Directory)
IFD:	1. Byte	Anzahl der Tags im IFD, jedes Tag besteht aus 12 Bytes
	Aufbau eines Tag:	
	1. Wort	Identifikation des Tags (es gibt 45 Tags)

	2. Wort	Typ der Daten
		`1`: Byte
		`2`: 0-terminierter String von ASCII-Zeichen
		`3`: short = 16-Bit unsigned integer `(0000-ffff)`
		`4`: long = 32-Bit unsigned integer `(00000000-ffffffff)`
		`5`: Rational = Bruch aus 2 long-Werten
		`11`: float = im IEEE-Format, einfache Genauigkeit
		`12`: double = im IEEE-Format, doppelte Genauigkeit

	3. + 4. Wort	Anzahl der Daten für dieses Tag
	5. + 6. Wort	Tag-Daten falls mit $\leq$ 4 Bytes darstellbar : von links nach rechts füllen falls mehr als 4 Bytes benötigt: 32-Bit Startadresse für Daten
Datenblock:		RGB-Werte oder Indizes (ggf. komprimiert) für die Farbtabelle

Offset	Bedeutung	Wert
0100	ImageWidth	z.B. 814
0101	ImageLength	z.B. 517
0102	Bits per Sample	z.B. 8, ggf. Zeiger auf 3 shorts
0103	Compression	1 keine Komprimierung 2 CCITT Gruppe 3 (nur bei Schwarz/Weiß) 3 CCITT Gruppe T4 (nur bei Schwarz-Weiß) 4 CCITT Gruppe T6 (nur bei Schwarz/Weiß) 5 LZW 6 JPEG 32773 Packbit mit Lauflängen-Kodierung
0106	Photometric Interpretation	0 S/W mit 0=Weiß, wachsende Nummern gegen Schwarz 1 S/W mit 0=Schwarz, wachsende Nummern gegen Weiß 2 RGB-Farbbild, pro Pixel drei Farbwerte, 0,0,0=Schwarz 3 Palettenbild, pro Pixel ein Index in Palette 4 Transparenzmaske für ein weiteres Bild 5 CMYK-Farbsystem, pro Pixel 4 Farbwerte 6 YUV-Farbsystem, pro Pixel Luminanz + 2 Chrominanz
0111	Strip Offset	Startadresse des Datenblocks (meistens $0008)
0112	Orientation	1 horizontal, beginnend oben links
0115	Samples per Pixel	3 bei RGB-Bildern 1 sonst
0116	Rows per Strip	wenn 1 Block: Bildhöhe wenn > 1 Block: Anzahl Zeilen pro Block
0117	Strip Byte Counts	wenn 1 Block: Anzahl der Bytes im Block wenn > 1 Block: Zeiger auf Feld mit Streifenlängen
011a	X Resolution	Zeiger auf 2 long Werte, zB. 300 1
011b	Y Resolution	Zeiger auf 2 long Werte, zB. 300 1
0128	Resolution unit	1 keine Einheit 2 Inch 3 Zentimeter
011c	Planar Configuration	1 RGBRGBRGB ... 2 RRRR... GGGG.... BBBB....
0140	Color map	Anzahl der Einträge + Startadresse Jeder Farbwert $0 \leq w = 255$ wird als Wort ww abgelegt

Tag-Art : True Color Bild

						Position 0:
4d4d						Motorola
002a						Versionsnr. (konstant)
0013	43ba					Offset des IFD $001343ba = 1262522
						Position 8:
ebe9	e7e2	e4c0	b3bd	9a9c	a387	Beginn der RGB-Werte, insgesamt 814*517*3 Bytes
9178	5294	724b	8d6f	4b8e	7453	
a79e	6da8	a06f	a19b	759d	a486	
a6ac	8aa2	aa92	a7ac	9ba5	a995	
...						
...						
...						
						Position 1262522: Beginn des Image File Directory
000b						$000b = 11 Tags zu je 12 Bytes
0100	0003	0000	0001	032e	0000	Breite, 1 short, Wert 3*256 + 2*16 + 14 = 814
0101	0003	0000	0001	0205	0000	Höhe, 1 short, Wert 2*256 + 0*16 + 5 = 517
0102	0003	0000	0003	0013	4444	Bits per sample, 3 short, Adresse $134444=1262660
0103	0003	0000	0001	0001	0000	Compression, 1 short, Wert=1 (keine Kompression)
0106	0003	0000	0001	0002	0000	Photometric, 1 short, Wert=2 (RGB-Farbbild)
0111	0004	0000	0001	0000	0008	StripOffsets,1 long, Wert=8 (Startadresse)
0112	0003	0000	0001	0001	0000	Orientierung,1 short, Wert = 1 (zeilenweise links/oben)
0115	0003	0000	0001	0003	0000	Samples per Pixel, 1 short, Wert=3 (RGB)
0116	0004	0000	0001	0000	0205	Rows per Strip, 1 long, Wert $205 = 517 (Zeilen)
0117	0004	0000	0001	0013	43b2	StripByteCounts, 1 long, Wert = 1262514 (Bytes)
011c	0003	0000	0001	0001	0000	Planar Konfiguration, 1 short, Wert=1 (RGBRGB...)
0000	0000					Ende IFD, kein weiteres IFD
						Position 1262660:
0008	0008	0008				jeweils 8 Bit pro Farbwert

kommentierter Hex-Dump zu einem True-Color-Bild im tif-Format

Vorspann	8 Bytes
814 * 517 RGB-Tripel	1262514 Bytes
IFD 11 * 12 + 12	144 Bytes
→ Dateilänge	1262666 Bytes

Tag-Art : Palettenbild

						Position 0:
4d4d						Motorola
002a						Versionsnr. (konstant)
0006	6be					Offset des IFD $00066bee = 420846
						Position 8:
fe68	bd52	6f6f	6f6f	0101	01f4	Beginn der Indizes, insgesamt 814*517 Bytes
5252	e952	2abd	522a	5252	b252	
0000	016f	076f	01bd	e952	3877	
ea3a	3838	38a1	0101	3a38	01be	
.						
.						
						Position 420846: Beginn des Image File Directory
000c						$000c = 12 Tags zu je 12 Bytes
0100	0003	0000	0001	032e	0000	Breite, 1 short, Wert $32e = 814
0101	0003	0000	0001	0205	0000	Höhe, 1 short, Wert $205 = 517
0102	0003	0000	0001	0008	0000	Bits per sample, 1 short, Wert = 8 (Adresse)
0103	0003	0000	0001	0001	0000	Compression, 1 short, Wert=1 (keine Kompression)
0106	0003	0000	0001	0003	0000	Photometric, 1 short, Wert=3 (Palette)
0111	0004	0000	0001	0000	0008	StripOffsets,1 long, Wert=8 (Startadresse)
0112	0003	0000	0001	0001	0000	Orientierung,1 short, Wert=1 (zeilenweise l.o.)
0115	0003	0000	0001	0001	0000	Samples per Pixel, 1 short, Wert=1 (Palette)
0116	0004	0000	0001	0000	0205	Rows per Strip, 1 long, Wert $205 = 517 (Zeilen)
0117	0004	0000	0001	0006	6be6	StripByteCounts,1 long, Wert = 420838 (Bytes)
011c	0003	0000	0001	0001	0000	Planar Konfiguration, 1 short, Wert=1 (RGBRGB..)
0140	0003	0000	0300	0006	6c84	Colormap, $300 = 768 short, beginnend bei $66c84
0000	0000					Ende IFD, kein weiteres IFD
						Position: $66c84 = 420996
						Palette mit 768 Doppelbytes
b8b8	a8a8	1010	3c3c	0808	2424	
b4b4	a8a8	1c1c	9898	6868	3838	
3c3c	5858	2c2c	7070	6464	8080	
.						
.						
3030	1414	1010	3030	2020	3c3c	
7070	2828	d8d8	1010	2828	2020	
7474	1414	acac	a8a8	e4e4	e4e4	

kommentierter Hex-Dump zu einem Palettenbild im tif-Format

Vorspann	8 Bytes
814 * 517 Indizes	420838 Bytes
IFD 12 * 12 + 6	150 Bytes
Palette 3 * 256 * 2	1536 Bytes
→ Dateilänge	422532 Bytes

10.2 PBM, PGM, PNM und PPM

Die *Portable Bitmap Utilities* (PBM, auch pbmplus oder netpbm) sind eine Sammlung freierhältlicher Programme, die von Jef Poskanzer gepflegt werden. Es handelt sich eigentlich um drei Programmpakete, die sich mit unterschiedlichen Bildarten und File-Formaten befassen:

- Die Portable Bitmap Utilities (PBM) manipulieren monochrome Bilder.
- Die Portable Greymap Utilities (PGM) manipulieren Grauwert-Bilder.
- Die Portable Pixmap Utilities (PPM) manipulieren Farbbilder.

Die Portable Anymap Utilities (PNM) arbeiten auf allen von den drei Programmpaketen erzeugten Bilddateien. Für PNM gibt es kein eigenes Dateiformat.

Die PBM-, PGM- und PPM-File-Formate sind so einfach wie möglich gehalten. Sie starten jeweils mit einem Header, dem die Bildinformation unmittelbar folgt. Der Header ist immer in ASCII geschrieben, wobei die einzelnen Einträge durch White Spaces getrennt werden. Die Bildinformation kann entweder im ASCII- oder Binärformat sein.

Es gibt jeweils zwei Header-Versionen, von denen eine für ASCII- und eine für binäre Bildinformationen benutzt wird.

PBM-Header

Ein PBM-Header besteht aus folgenden Einträgen, jeweils durch White Spaces getrennt:

Magic Value	`P1` für ASCII-, `P4` für binäre Bildinformation
Image Width	Breite des Bildes in Pixeln (ASCII-Dezimalwert)
Image Height	Höhe des Bildes in Pixeln (ASCII-Dezimalwert)

PGM-Header

Ein PGM-Header besteht aus folgenden Einträgen, jeweils durch White Spaces getrennt:

Magic Value	`P2` für ASCII-, `P5` für binäre Bildinformation
Image Width	Breite des Bildes in Pixeln (ASCII-Dezimalwert)
Image Height	Höhe des Bildes in Pixeln (ASCII-Dezimalwert)
Max Grey	Maximaler Grauwert (ASCII-Dezimalwert)

PPM-Header

Ein PPM-Header besteht aus folgenden Einträgen, jeweils durch White Spaces getrennt:

Magic Value	`P3` für ASCII-, `P6` für binäre Bildinformation
Image Width	Breite des Bildes in Pixeln (ASCII-Dezimalwert)
Image Height	Höhe des Bildes in Pixeln (ASCII-Dezimalwert)
Max Color	Maximaler Farbwert (ASCII-Dezimalwert)

Bildinformation in ASCII

Nach dem Header folgt die Beschreibung der Breite × Höhe vielen Pixel, beginnend in der linken oberen Bildecke zeilenweise von links nach rechts.

Bei PPM besteht jedes Pixel aus drei ASCII-Dezimalwerten zwischen 0 und dem angegebenen maximalen Farbwert, die die Rot-, Grün- und Blauwerte des Pixels darstellen.

Bei PBM und PGM gibt es nur einen ASCII-Dezimalwert pro Pixel. Bei PBM ist der maximale Wert implizit 1; die Werte müssen nicht durch White Spaces getrennt werden.

Beispiel:

Das folgende Beispiel stellt ein 4×4-Pixmap im ASCII-Format dar:

```
P3
# feep.ppm
4 4
15
 0  0  0    0  0  0    0  0  0   15  0 15
 0  0  0    0 15  7    0  0  0    0  0  0
 0  0  0    0  0  0    0 15  7    0  0  0
15  0 15    0  0  0    0  0  0    0  0  0
```

Wie zu sehen, können auch Kommentare in ein PNM-File eingefügt werden. Zeichen ab einem `#` bis zum Zeilenende werden ignoriert.

Binäre Bildinformation

Deutlich kleinere Dateien, die schneller gelesen und geschrieben werden können, werden mit Hilfe der binären Bilddarstellung erreicht.

Die Pixelwerte werden dabei wie folgt abgelegt:

Format	Magic Value	binäre Darstellung
PBM	`P4`	acht Pixel pro Byte
PGM	`P5`	ein Pixel pro Byte
PPM	`P6`	drei Bytes pro Pixel

Beim binären Format ist nach dem Header nur noch ein einziger White Space (typischerweise Newline) erlaubt. Innerhalb der binären Bilddaten sind keine White Spaces erlaubt. Die Bitorder innerhalb der Bytes ist "most significant bit first".

Beachtenswert ist, daß für das Binärformat nur maximale Werte bis 255 benutzt werden können.

Konvertierungsroutinen

Für die Umwandlung vom bzw. in das PNM-Format steht eine ganze Reihe von Routinen zur Verfügung, z.B.:

`anytopnm`, `asciitopgm`, `bmptoppm`, `giftopnm`, `pbmtopgm`, `pgmtopbm`, `pgmtoppm`, `ppmtopgm`, `pstopnm`, `rgb3toppm`, `tifftopnm`, `xbmtopbm`, `xwdtopnm`, `pbmtoascii`, `pbmtolps`, `pbmtopgm`, `pbmtoxbm`, `pgmtopbm`, `pgmtoppm`, `pnmtops`, `pnmtotiff`, `pnmtoxwd`, `ppmtobmp`, `ppmtogif`, `ppmtopgm`, `ppmtorgb3`.

10.3 Photo-CD

Die von Kodak entwickelte Photo-CD weist eine Verzeichnisstruktur auf, die zum Ansteuern eines Photo-CD-Players ausgelegt ist und außerdem von diversen Bildverarbeitungsprogrammen gelesen werden kann. Hierfür stellt Kodak eine Programmierbibliothek zur Verfügung; das Erstellen einer Photo-CD ist nur speziellen Labors vorbehalten. Typischer Preis: 16,00 DM für CD, 5,00 DM für Session, 1,20 DM pro Bild. Es können 100 Photos, ggf. in mehreren Sessions, aufgebracht werden. Da sich dadurch das Verzeichnis an verschiedenen Stellen der CD befinden kann, muß das CD-Laufwerk "multisessionfähig" sein.

Jedes Photo wird in 5 verschiedenen Auflösungen in einem (patentrechtlich geschützten) Image-Pac abgelegt.

Bezeichnung	Auflösung	unkomprimierter Platzbedarf
Base/16	192×128	72 KBytes
Base/4	384×256	288 KBytes
Base	768×512	1152 KBytes
Base$*$4	1536×1024	4608 KBytes
Base$*$16	3072×2048	18432 KBytes

Beim Einscannen werden die RGB-Werte für jeden Bildpunkt mit 12 Bit Genauigkeit pro Farbanteil abgetastet und anschließend in das Kodak-eigene YCC-Format konvertiert (8 Bit für Helligkeit, je 8 Bit für zwei Chrominanzwerte). Durch 4:1:1 Subsampling wird die Chrominanz über je 4 Pixel gemittelt. Pro Image-Pac werden die ersten 3 Auflösungen explizit gespeichert, für Base$*$4 und Base$*$16 nur die Differenzen. Dadurch reichen etwa 4.5 MByte aus, also etwa 20 % des aufsummierten Platzbedarfs.

10.4 Auflösung

Für die Qualität eines Bildes sind die am Erstellungsprozeß beteiligten Auflösungen verantwortlich. Die Auflösung wird meistens gemessen als *Dots per Inch* (dpi).

Scanner-Auflösung:	Gegeben durch Anzahl der CCD-Elemente in einer Sensorzeile (z.B. 300 dpi).
Scan-Auflösung:	Gewählte Auflösung beim Scanner.
Bildauflösung:	Entspricht zunächst der Scan-Auflösung, kann später ggf. runtergerechnet werden (durch Mittelung) oder hochgerechnet (durch Interpolation).
Bildschirmauflösung:	Ein 17-Zoll Monitor mit Seiten-Verhältnis 4:3 hat eine Breite von $(17 \cdot 4)/5 = 13.6$ inch. Bei 1024×768 Pixeln ergibt das $1024/13.6 \approx 75$ dpi.
Druckerauflösung:	Gegeben durch die Anzahl der Druckerpunkte, die der Druckkopf nebeneinander setzen kann (z.B. 300 dpi). Da bei Tintenstrahldruckern nur 3 Grundfarben (ggf. zusätzlich Schwarz) zur Verfügung stehen, wird jedes Farbpixel durch eine Rasterzelle mit 16×16 Druckerpunkten dargestellt.
Druckauflösung:	Druckerauflösung/Rasterzellengröße, d.h. ein 400 dpi-Belichter mit 16×16 Rasterzellen kann nur $400/16 = 25$ dpi erzeugen.

Thermosublimationsdrucker lösen durch Heizelemente Farbpigmente aus einer Folie, die anschließend in ein Spezialpapier eindringen. Jedes True-Color-Pixel wird daher als ein Farbpunkt gedruckt (*Continuous Tone-Druck*). Ein 300 dpi Thermosublimationsdrucker ermöglicht daher eine 300 dpi Druckauflösung. Ein 100 ASA-Kleinbilddia, welches eine reale Auflösung von 2000 dpi in sich birgt, kann daher mit einem 300 dpi-Thermosublimationsdrucker in idealer Weise auf das $2000/300 = 6.66$-fache vergrößert werden, welches eine Kantenlänge von $6.66 * 36$ mm $= 24$ cm bedeutet (etwa DIN-A4). Allerdings ist der im analogen Dia enthaltene Helligkeitsumfang etwa um den Faktor 10 größer als ein Farbdruck oder Monitorbild darstellen kann.

Auflösung KB-Dia

Die Projektion eines 24×36 mm Kleinbilddias auf eine 1.80 m breite Leinwand stellt eine 50-fache Vergrößerung dar. Sind dann auf 1 cm Leinwand 8 Linien zu unterscheiden, entspricht das 16 dots per cm Leinwand= 800 dots per cm Dia ≈ 2000 dpi.

24 x 36 mm Dia, eingescannt mit 2168 dpi, ergibt 3072 x 2048 Pixel,
skaliert auf 75 %, ergibt 2304 x 1536 Pixel
gedruckt mit 300 dpi Ink Jet, ergibt 19.5 x 13.0 cm.

10.5 LZW-Komprimierung (Lempel/Ziv/Welch, 1984)

Ein wichtiger Bestandteil des GIF-Formates (siehe nächste Sektion) ist die LZW-Komprimierung für Zeichenketten.

Starte mit Stringtabelle, gefüllt mit `characters`, und fülle sie mit Verweisen auf bereits gelesene Substrings.

```
x := get_char();
w := x;
repeat
   x := get_char();
   if wx in Tabelle
      then w := wx
      else put_string(code(w));
           trage wx in Tabelle ein
           w := x
   endif
until x = EOF
```

w	Input	Output	String	Code
			a	1
			b	2
			c	3
	a			
a	b	1	ab	4
b	a	2	ba	5
a	b			
ab	c	4	abc	6
c	b	3	cb	7
b	a			
ba	b	5	bab	8
b	a			
ba	b			
bab	a	8	baba	9
a	a	1	aa	10
a	a			
aa	a	10	aaa	11
a	a			
aa	a			
aaa	a	11	aaaa	12

Entwicklung von Output und Tabelle für den Input `ababcbababaaaaaaa`

String Präfix-String-Index	Erweiterungs-character	Code
	a	1
	b	2
	c	3
1	b	4
2	a	5
4	c	6
3	b	7
5	b	8
8	a	9
1	a	10
10	a	11
11	a	12

Implementation der Stringtabelle

10.6 GIF

Das *Graphics Interchange Format* (GIF) wurde von CompuServe eingeführt und wird benutzt, um ggf. mehrere Bilder (Animation) in einer einzigen Datei zu speichern und zwischen verschiedenen Rechnersystemen auszutauschen. Bezogen auf die Anzahl der existierenden Dateien ist GIF eines der weitverbreitetsten Formate zum Speichern von Bilddaten.

Im Gegensatz zu vielen anderen Dateiformaten basiert GIF auf einem Strom der Daten. Das Format besteht aus einer Reihe von Datenpaketen, Blöcke genannt, kombiniert mit zusätzlicher Protokollinformation.

Das GIF-Format ist in der Lage, Bilddaten mit einer Farbtiefe von 1 bis 8 Bits zu speichern. Die Bilder werden immer im RGB-Modell unter Benutzung einer Farbtabelle gespeichert.

Bei den auf WWW-Seiten verwendeten Grafikformaten nimmt GIF den Spitzenplatz in punkto Häufigkeit ein. Insbesondere bei künstlich erzeugten Bildern mit einheitlich gefärbten Farbflächen ist es an Kompaktheit nicht zu schlagen.

Abbildung 10.1: Statisches GIF, Dateigröße: 2K

Zwei Kompressionsideen tragen zur Datenreduktion bei:

Farbpalette: Statt in jedem Pixel das komplette RGB-Tripel mit 3 Byte = 24 Bit Farbinformation zu speichern, werden für geeignetes p die 2^p wichtigsten Farben in der Farbpalette, gehalten und über einen p-Bit langen Index referiert. Für $p = 8$ schrumpft der Platzbedarf daher auf ein Drittel.

LZW: Das von *Lempel*, *Ziv* und *Welch* entwickelte und als Patent geschützte Verfahren zur Kompression beliebiger Zeichenfolgen basiert auf der Idee, in einer sogenannten Präfix-Tabelle die Anfangsstücke bereits gelesener Strings zu speichern und wiederholtes Auftauchen derselben Strings durch Verweise in die Tabelle zu kodieren.

Beide Ansätze zahlen sich insbesondere dann aus, wenn die Vorlage weite Bereiche mit identischer Information enthält, wie es bei computergenerierten Grafiken, wie z.B. Logos, der Fall ist. Zum einen enthält das Bild dann gar nicht die theoretisch verfügbare Zahl von $256^3 \approx 16$ Millionen Farben, sondern nur wenige Dutzend, und kann daher völlig verlustfrei durch eine Palette mit 256 Einträgen dargestellt werden. Zum anderen führen Folgen von identischen Pixelindizes zu kompakten Einträgen in der Präfixtabelle.

10.7 Erzeugung einer bildbezogenen Farbtabelle

Zunächst wird für jede Farbe die Häufigkeit ihres Auftretens ermittelt. Ggf. muß "vorquantisiert" werden von 24 Bit auf 15 Bit (je 5 Bit für Rot, Grün, Blau); hierdurch erhält das Histogramm maximal 32768 Einträge. Sei $d(a,b)$ der Abstand zweier Farbtupel a, b, z.B. $\sqrt{(a_{Rot}-b_{Rot})^2+(a_{Gruen}-b_{Gruen})^2+(a_{Blau}-b_{Blau})^2}$.

Optimaler Algorithmus

Gegeben sei eine Menge F von beobachteten Farben. Gesucht ist eine Menge M von Repräsentanten, so daß der Ausdruck

$$\Delta := \max_{x \in F} \min_{p \in M} d(p,x)$$

minimiert wird, d.h., Δ ist der maximale Abstand, den eine Farbe zu ihrem nächsten Repräsentanten hat.

Da die exakte Bestimmung von M eine exponentielle Laufzeit verursacht, begnügt man sich mit einer Näherungslösung.

Popularity-Algorithmus (1978)

```
Wähle die K häufigsten Farben.
```

Nachteil: Selten vorkommende Farben werden schlecht repräsentiert.

Diversity-Algorithmus (*xv*, John Bradley, 1989)

```
Initialisiere M mit der häufigsten Farbe
for i := 2 to K do
       erweitere M um die Farbe des Histogramms,
       die zu allen Farben aus M den größten Abstand hat
end
```

Median-Cut (Heckbert, MIT 1980)

```
Initialisiere RGB-Wuerfel mit Häufigkeiten der beobachteten Farbtupel
Initialisiere Wurzel des Schnittbaums mit Gesamtzahl der Pixel
While noch_nicht_genügend_Blätter do
       Wähle Blatt mit der größten Pixelzahl
       Bestimme umschliessende Box
       Bestimme Achse mit größtem Wertebereich
       Durchlaufe Box längs dieser Achse
       Teile am Median in zwei Hälften
       Trage Hälften als Soehne ein
end
Für jedes Blatt wähle den Mittelwert aller in ihm liegenden Farben.
```

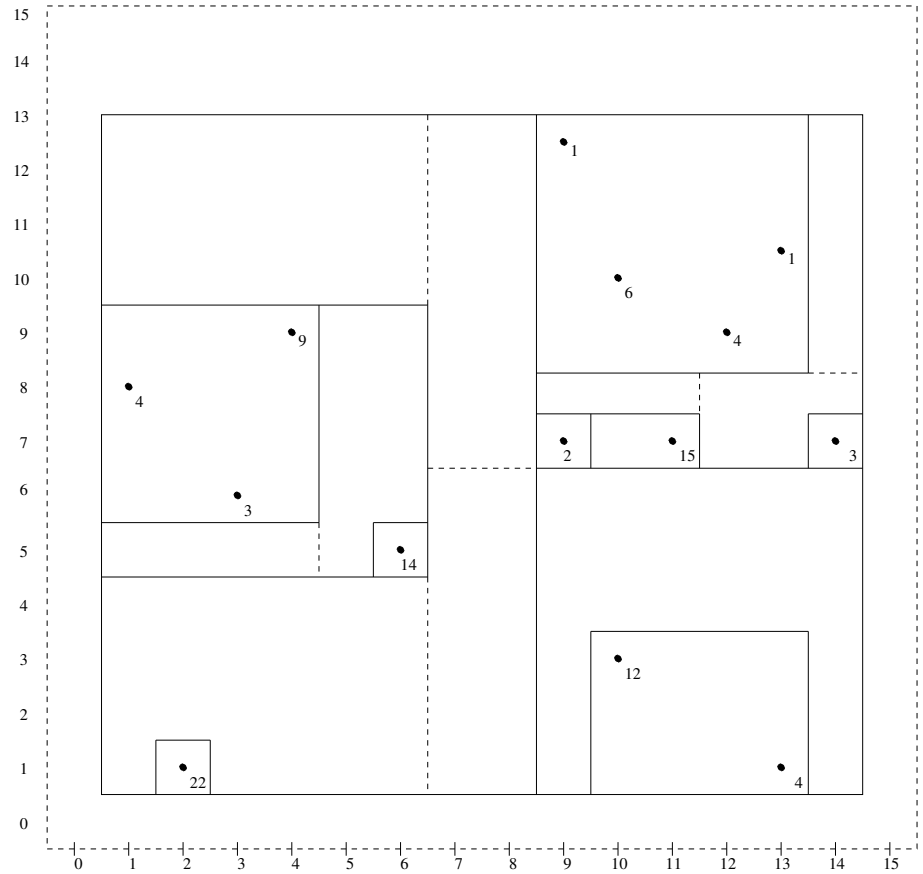


Abbildung 10.2: Partitionierung der Ebene beim Median-Cut-Algorithmus

Abbildung 10.2 zeigt die Anwendung des Median-Cut-Algorithmus anhand eines Beispiels. Zur einfachen Darstellung ist der Farbbaum zweidimensional gewählt. Gezeigt wird die Verteilung der Farbtupel aus dem Bereich $[0 \ldots 15] \times [0 \ldots 15]$ in einem Bild mit $10 \times 10 = 100$ Pixeln. Eingetragen sind an der Position x/y die Häufigkeit des Farbtupels x, y. Schnittlinien sind gestrichelt, umschließende Boxen durchgezogen gezeichnet.

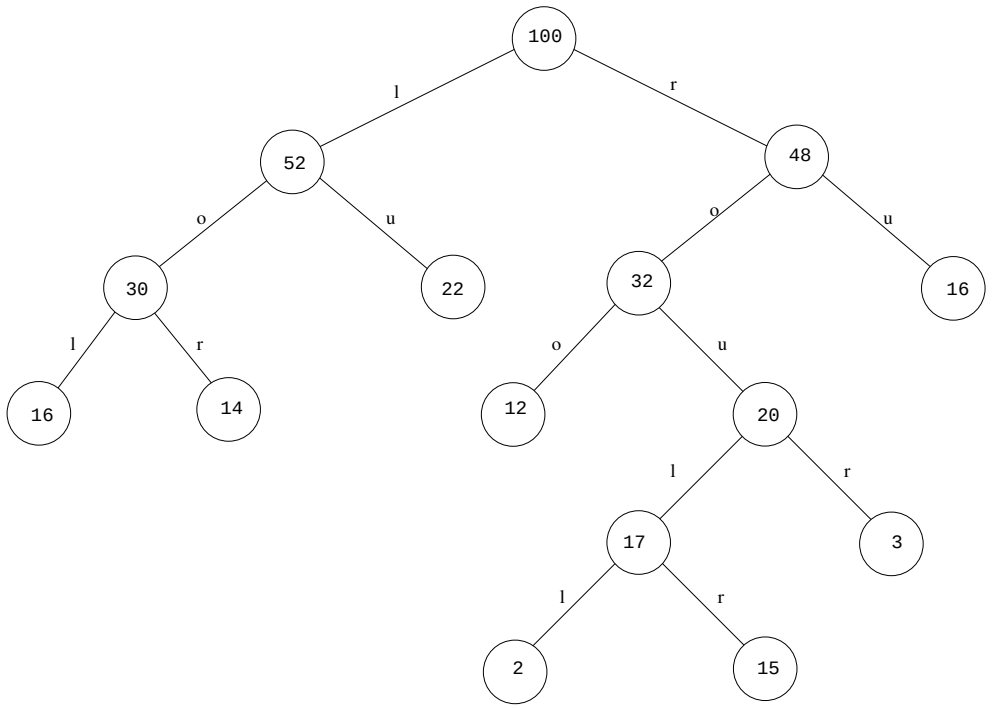


Abbildung 10.3: Schnittbaum beim Median-Cut-Algorithmus

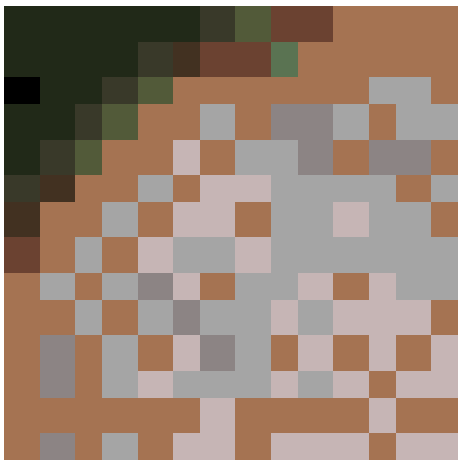
Abbildung 10.3 zeigt für das vorliegende Beispiel den Schnittbaum nach Anwendung des Median-Cut-Algorithmus. Die Knoten sind markiert mit der Anzahl der noch zu quantisierenden Pixel, an den Kanten ist vermerkt, ob es sich um einen Links/Rechts- oder um einen Oben/Unten-Schnitt handelt.

Floyd-Steinberg-Dithering (1975)
Der bei Verwendung einer Farbtabelle verursachte Fehler beim Quantisieren eines Pixels wird auf die Nachbarpixel verteilt (bevor diese quantisiert werden).

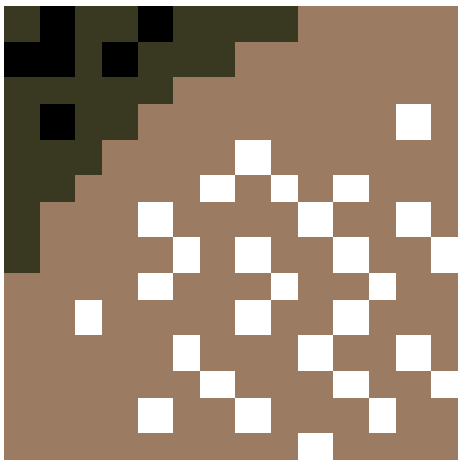
```
for (i = 0; i < M; i++)
for (j = 0; j < N; j++)
{
   x = f[i][j];   /* hole Original-Farbe */
   k = p(x);      /* finde naechsten Repraesentant */
   q[i][j] = k;   /* zeichne quantisiertes Pixel */
   e = d(x, k);   /* bestimme Fehlerabstand */
   f [i][j + 1]     = f[i][j + 1]     + e * 3.0/8.0;
   f [i + 1][j]     = f[i + 1][j]     + e * 3.0/8.0;
   f [i + 1][j + 1] = f[i + 1][j + 1] + e * 1.0/4.0;
}
```

24 Bit pro Pixel,
16 Mill. Farben

8 Bit pro Pixel,
256 Farben



4 Bit pro Pixel,
16 Farben



2 Bit pro Pixel,
4 Farben

Abbildung 10.4: Auswirkung des Median-Cut-Algorithmus

Abbildung 10.4 zeigt Original und quantisierte Versionen einer 14×14 Ausschnittvergrößerung, erstellt von einem 814×517 True-Color-Bild. Die Zahl der Farben bezieht sich jeweils auf das Gesamtbild. Verwendet wurde der Median-Cut-Algorithmus mit anschließendem Floyd-Steinberg-Dithering.

10.8 Kompression nach JPEG

Die **J**oint **P**hotographic **E**xpert **G**roup bildete sich aus Mitgliedern der Standardisierungsgremien CCITT (Consultative Committee for International Telephone and Telegraph) und ISO (International Standardization Organization). JPEG wurde schließlich zum Namen für den Standard selbst.

Zunächst wird das RGB-Bild in den YUV-Raum transformiert. Da das Auge für Helligkeitssprünge sensitiver ist als für Farbdifferenzen, kann man nun die Y-Matrix in der vollen Auflösung belassen und in den U, V-Matrizen jeweils 4 Pixel mitteln (4:1:1 Subsampling).

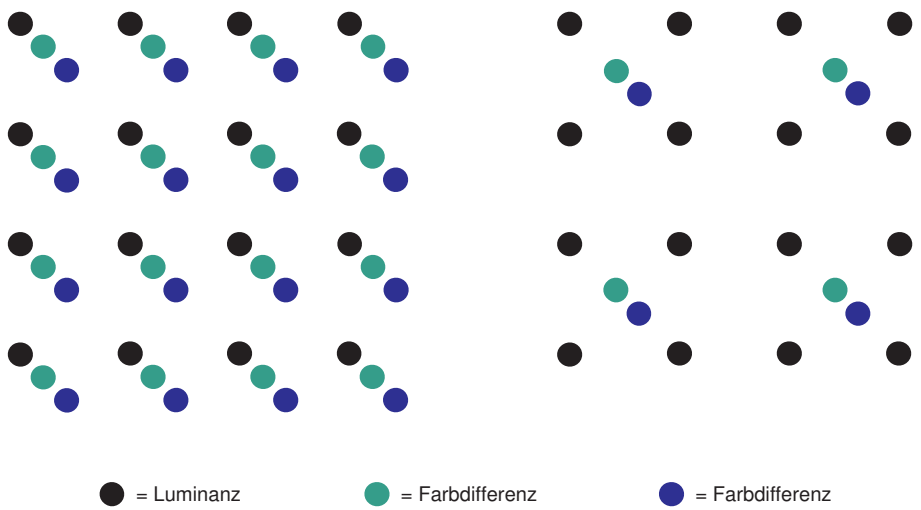


Abbildung 10.5: 4:1:1 Subsampling

Für je 4 Originalpixel mit insgesamt 12 Bytes werden nun $4 + 1 + 1 = 6$ Bytes benötigt (pro Bildpunkt also $6 \cdot 8/4 = 12$ Bit). Die Reduktion beträgt 50 %.

Beim JPEG-Verfahren werden nun die drei Matrizen in Blöcke mit 8×8 Abtastwerten aufgeteilt. Anschließend durchlaufen die Blöcke folgende Schritte:

1. Diskrete Cosinus Transformation
2. Rundung der Frequenzkoeffizienten
3. Lauflängenkodierung der quantisierten Werte
4. Huffmancodierung der Lauflängenbeschreibung.

Um aus dem komprimierten Bild das Original zu rekonstruieren, werden die Schritte in umgekehrter Reihenfolge und inverser Funktionalität durchlaufen.

Durch die Wahl der Rundungstabelle läßt sich der Tradeoff zwischen Qualität und Kompression beliebig steuern. Ein typisches Farbbild läßt sich ohne für das Auge sichtbare Artefakte auf 10 % seiner Originalgröße reduzieren. Eine Reduktion auf 5 % verursacht oft nur leichte, kaum wahrnehmbare Verzerrungen.

DCT (Diskrete Cosinus Transformation)
Die diskrete Cosinus-Transformation ist ein Spezialfall der Fouriertransformation. Es wird ausgenutzt, daß für "gerade" Funktionen (d.h. $f(-x) = f(x)$) der Sinus-Term mit seinem imaginären Anteil wegfällt. Ein zweidimensionaler Bildbereich läßt sich durch Spiegelung an der y-Achse künstlich gerade machen.

$$s[u,v] := \frac{1}{4} \cdot c_u \cdot c_v \cdot \sum_{x=0}^{7} \sum_{y=0}^{7} f[x,y] \cdot \cos\frac{(2x+1)\cdot u \cdot \pi}{16} \cdot \cos\frac{(2y+1)\cdot v \cdot \pi}{16}$$

$$c_u, c_v := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{für } u, v = 0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Hierdurch wird eine 8×8 Ortsmatrix in eine 8×8 Frequenzmatrix transformiert.

Mit Hilfe der inversen DCT lassen sich die Originalwerte rekonstruieren.

$$f[x,y] := \frac{1}{4} \sum_{u=0}^{7} \sum_{v=0}^{7} c_u \cdot c_v \cdot s[u,v] \cdot \cos\frac{(2x+1)\cdot u \cdot \pi}{16} \cdot \cos\frac{(2y+1)\cdot v \cdot \pi}{16}$$

Für die Bildverarbeitung wird der Pixelwertebereich 0..255 in das symmetrische Intervall $-128..127$ verschoben. Der Wertebereich von s liegt dann im Intervall $-1024.. + 1023$. Der errechnete Koeffizient s_{00} entspricht dem Anteil der Frequenz null in beiden Achsen und wird DC-Koeffizient (Gleichspannungsanteil) bezeichnet. Die übrigen Koeffizienten werden AC-Koeffizienten (Wechselspannungsanteil) genannt. Z.B. bezeichnet s_{77} die höchste, in beiden Richtungen auftretende Frequenz.

Die Eingangsmatrix M läßt sich auch durch $T \cdot M \cdot T'$ transformieren mit Hilfe der Matrix T:

```
0.353553    0.353553    0.353553    0.353553    0.353553    0.353553    0.353553    0.353553
0.490393    0.415735    0.277785    0.097545   -0.097545   -0.277785   -0.415735   -0.490393
0.461940    0.191342   -0.191342   -0.461940   -0.461940   -0.191342    0.191342    0.461940
0.415735   -0.097545   -0.490393   -0.277785    0.277785    0.490393    0.097545   -0.415735
0.353553   -0.353553   -0.353553    0.353553    0.353553   -0.353553   -0.353553    0.353553
0.277785   -0.490393    0.097545    0.415735   -0.415735   -0.097545    0.490393   -0.277785
0.191342   -0.461940    0.461940   -0.191342   -0.191342    0.461940   -0.461940    0.191342
0.097545   -0.277785    0.415735   -0.490393    0.490393   -0.415735    0.277785   -0.097545
```

Quantisierung
Die errechnete Matrix hat von links oben nach rechts unten Werte abnehmender Größe. Da die Werte rechts unten den hohen, eher unwichtigen Frequenzen entsprechen, werden alle Einträge mit Faktoren zunehmender Größe dividiert.

$$r[u,v] := \frac{s[u,v]}{q[u,v]}$$

95	88	87	95	88	95	95	95
143	144	151	151	153	170	183	181
153	151	162	166	162	151	126	117
143	144	133	130	143	153	159	175
123	112	116	130	143	147	162	189
133	151	162	166	170	188	166	128
160	168	166	159	135	101	93	98
154	155	153	144	126	106	118	133

Bildmatrix

↓

98	95	91	89	90	95	101	106
140	143	149	156	163	167	168	167
146	149	154	159	159	151	137	126
149	142	136	137	145	156	163	166
119	117	118	125	140	157	170	176
137	147	160	170	172	166	157	150
166	167	164	152	132	112	99	93
151	153	150	139	125	118	119	123

rekonstruierte Bildmatrix

↑

93	2	-8	-7	3	1	1	-2
-38	-58	11	17	-3	5	5	-3
-84	63	-1	-17	2	7	-4	-0
-51	-37	-10	13	-10	5	-1	-4
-85	-42	50	-8	18	-5	-1	1
-63	66	-13	-1	2	-6	-2	-2
-16	14	-37	18	-12	4	3	-3
-53	31	-7	-10	23	-0	2	2

DCT-Koeffizienten

$\longrightarrow$

31	0	-1	0	0	0	0	0
-7	-8	1	1	0	0	0	0
-12	7	0	-1	0	0	0	0
-5	-3	0	0	0	0	0	0
-7	-3	3	0	0	0	0	0
-4	4	0	0	0	0	0	0
-1	0	-1	0	0	0	0	0
-3	1	0	0	0	0	0	0

quantisierte DCT-Koeffizienten

3	5	7	9	11	13	15	17
5	7	9	11	13	15	17	19
7	9	11	13	15	17	19	21
9	11	13	15	17	19	21	23
11	13	15	17	19	21	23	25
13	15	17	19	21	23	25	27
15	17	19	21	23	25	27	29
17	19	21	23	25	27	29	31

Quantisierungsmatrix

Entropiekodierung
Die DC-Koeffizienten benachbarter Blöcke unterscheiden sich nur wenig und werden daher als Differenz zum Vorgängerblock übertragen.

Die AC-Koeffizienten werden zunächst in eine Zick-Zack-Sequenz umgeordnet:

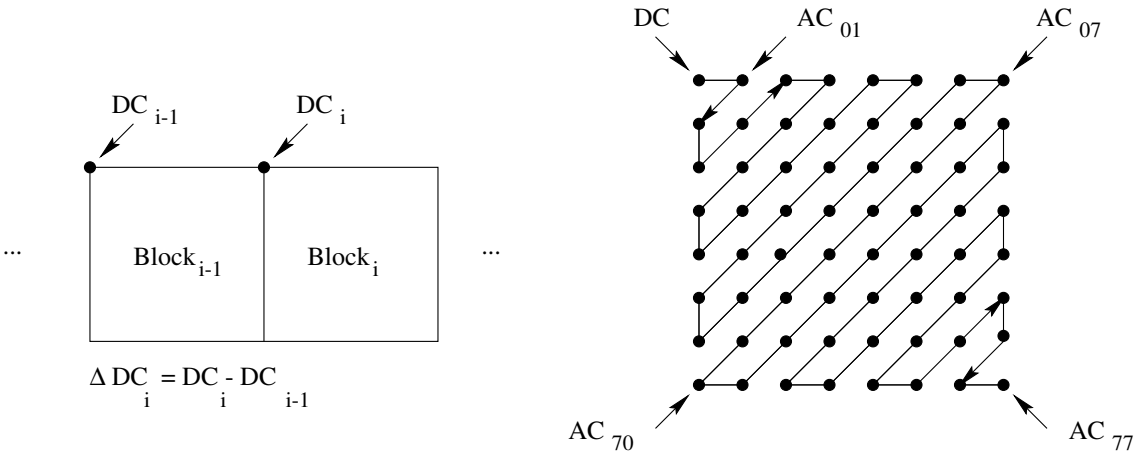


Abbildung 10.6: Durchlaufsequenz pro Macroblock

Die AC-Koeffizienten längs dieses Weges bis zum letzten Eintrag ungleich Null werden als Folge von Paaren beschrieben:

Symbol 1: Länge der ununterbrochenen Folge von Nullen vor diesem Wert (Runlength)
Anzahl der Bits, die zur Darstellung des Wertes erforderlich sind.
Symbol 2: der Wert selbst

Der quantisierte DCT-Koeffizient AC_{70} aus vorigem Beispiel wird beschrieben als Tupel $< (11, 2), -3 >$, denn vor ihm in der Zickzacksequenz stehen 11 Nullen, sein Wert kann mit 2 Bit codiert werden, und sein Wert beträgt -3.

Für das Symbol 1 gibt es Häufigkeitsverteilungen, aus denen sich ein Huffman-Code konstruieren läßt. Für das Symbol 2 wählt man ein 2-er Komplement, welches berücksichtigt, daß bei angekündigten N Bits nur solche Zahlen kodiert werden müssen, für die $N-1$ Bits nicht ausreichen.

Länge/Bitzahl	Codierung
0/0 (EOB)	1010
0/1	00
0/2	01
0/3	100
0/4	1011
0/5	11010
0/6	1111000
0/7	11111000
0/8	1111110110
0/9	1111111110000010
0/10	1111111110000011
1/1	1100
1/2	11011
1/3	1111001
⋮	⋮
2/1	11100
2/2	11111001
2/3	1111110111
⋮	⋮
3/1	111010
3/2	111110111
3/3	111111110101
⋮	⋮
11/1	1111111001
11/2	1111111111010000
⋮	⋮
15/10	1111111111111110

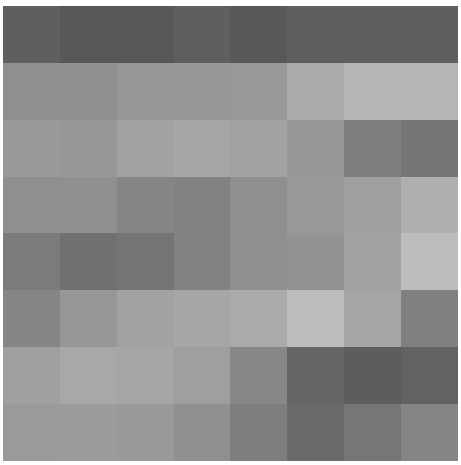
Huffman Codierung
für Symbol 1

Wert	Codierung
15	1111
14	1110
13	1101
12	1100
11	1011
10	1010
9	1001
8	1000
7	111
6	110
5	101
4	100
3	11
2	01
1	1
-1	0
-2	10
-3	00
-4	011
-5	010
-6	001
-7	000
-8	0111
-9	0110
-10	0101
-11	0100
-12	0011
-13	0010
-14	0001
-15	0000

Komplement-Codierung
für Symbol 2

Symbol 1	Symbol 2	Huffman für Symbol 1	2-er Komplement für Symbol 2
(1, 3)	-7	1111001	000
(0, 4)	-12	1011	0011
(0, 4)	-8	1011	0111
(0, 1)	-1	00	0
(1, 1)	1	1100	1
(0, 3)	7	100	111
(0, 3)	-5	100	010
(0, 3)	-7	100	000
(0, 2)	-3	01	00
(1, 1)	1	1100	1
(3, 1)	-1	111010	0
(1, 2)	-3	11011	00
(0, 3)	-4	100	011
(0, 1)	-1	00	0
(0, 3)	4	100	100
(0, 2)	3	01	11
(11, 2)	-3	1111111111010000	00
(0, 1)	1	00	1
(0, 1)	-1	00	0
EOB		1010	

Symbole und ihre Kodierung für die im Beispiel vorgestellten quantisierten AC-Koeffizienten



Ausgangsbildmatrix

rekonstruierte Bildmatrix

Abbildung 10.7: 8 x 8 Matrix vor und nach der JPG-Kompression.

```
 95   88   87   95   88   95   95   95
143  144  151  151  153  170  183  181
153  151  162  166  162  151  126  117
143  144  133  130  143  153  159  175
123  112  116  130  143  147  162  189
133  151  162  166  170  188  166  128
160  168  166  159  135  101   93   98
154  155  153  144  126  106  118  133
```

Dezimaldarstellung der Bildbereich-Matrix

```
01011111  01011000  01010111  01011111  01011000  01011111  01011111  01011111
10001111  10010000  10010111  10010111  10011001  10101010  10110111  10110101
10011001  10010111  10100010  10100110  10100010  10010111  01111110  01110101
10001111  10010000  10000101  10000010  10001111  10011001  10011111  10101111
01111011  01110000  01110100  10000010  10001111  10010011  10100010  10111101
10000101  10010111  10100010  10100110  10101010  10111100  10100110  10000000
10100000  10101000  10100110  10011111  10000111  01100101  01011101  01100010
10011010  10011011  10011001  10010000  01111110  01101010  01110110  10000101
```

8-Bit-Codierung für Bildbereich-Matrix

```
00011111
```

quantisierter DC-Koeffizient

```
1111001000101100111011011100011001100111100010100000010011001
1110100110110010001100010010001111111111111010000000010001010
```

Huffman-Codierung für quantisierte AC-Koeffizienten

motel.tif
100%

motel80.jpg
9%

motel40.jpg
5%

motel20.jpg
4%

Abbildung 10.8: Kompression nach JPEG. Platzbedarf in Prozent bezogen auf tif-Datei

motel10.jpg
3%

motel05.jpg
2%

motel02.jpg
1.5%

motel01.jpg
1%

Abbildung 10.9: Kompression nach JPEG. Platzbedarf in Prozent bezogen auf tif-Datei

Kapitel 11

3D-Grundlagen

Für 3-dimensionale Objekte gibt es mehrere Möglichkeiten der Repräsentation (d.h. Definition des Objekts) und der Darstellung (d.h. Projektion des Objekts auf den Bildschirm).

11.1 Repräsentation und Darstellung

Repräsentation

- Elementarobjekt mit Definitionspunkten,
- Drahtmodell mit Kantenliste,
- Flächenmodell mit Flächenliste,
- Flächenmodell mit Halbkantendarstellung,
- CSG (constructive solid geometry) mit mengentheoretischer Verknüpfung von Elementarobjekten.

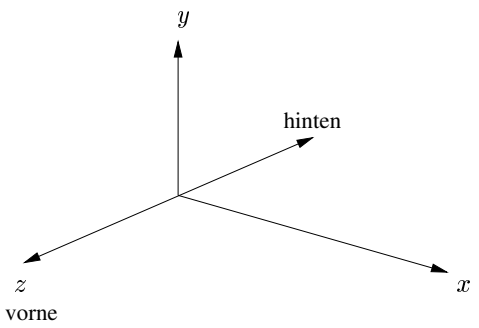
Darstellung

- Drahtmodell mit sämtlichen Kanten,
- Drahtmodell mit Entfernung verdeckter Kanten,
- Flächenmodell mit Schattierung, ohne abgewandte Flächen,
- Flächenmodell mit Berechnung von Lichtreflektion, ohne verdeckte Teile von Flächen,
- Körpermodell mit Berechnung von Schattenbildung, Spiegelungen und Brechungen.

11.2 3D-Koordinatensystem

Weit verbreitet ist das kartesische Koordinaten-System, z.B. in der rechtshändigen Form.

Bei gespreizten Fingern der rechten Hand zeigt der Zeigefinger in x-Richtung, der Mittelfinger in y-Richtung, der Daumen in z-Richtung.



11.3 Länge und Kreuzprodukt

Gegeben sei ein 3D-Vektor

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Seine **Länge** ist definiert als

$$|v| := \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

Gegeben seien zwei 3D-Vektoren

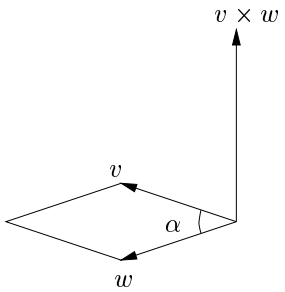
$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \text{ und } w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

Das **Kreuzprodukt** von v und w ist definiert als

$$v \times w = \begin{pmatrix} v_2 \cdot w_3 - v_3 \cdot w_2 \\ v_3 \cdot w_1 - v_1 \cdot w_3 \\ v_1 \cdot w_2 - v_2 \cdot w_1 \end{pmatrix}$$

Der Vektor $v \times w$ steht senkrecht auf v und steht senkrecht auf w. Seine Länge entspricht der Fläche des durch v und w aufgespannten Parallelogramms, d.h.

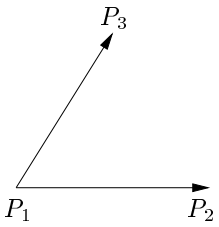
$$|v \times w| = |v| \cdot |w| \cdot \sin(\alpha)$$



In einem rechtshändigen Koordinatensystem entspricht bei gespreizten Fingern der Zeigefinger v, der Mittelfinger w, der Daumen $v \times w$.

Anwendung des Kreuzprodukts

Gegeben sei eine Fläche durch 3 nicht kollineare Punkte P_1, P_2, P_3.



Der Vektor $(P_2 - P_1) \times (P_3 - P_1)$ bildet den Normalenvektor zur Fläche.
Ist eine Ebene durch ihre Ebenengleichung $Ax + By + Cz + D = 0$ gegeben, so ergibt sich der Normalenvektor als (A, B, C).
Ist ein Normalenvektor (A, B, C) gegeben, so errechnet sich D durch Einsetzen eines beliebigen Punktes der Ebene.
Ein Punkt (x, y, z) liegt

oberhalb der Ebene,	falls	$Ax + By + Cz + D > 0$
unterhalb der Ebene,	falls	$Ax + By + Cz + D < 0$
in der Ebene,	falls	$Ax + By + Cz + D = 0$

11.4 Skalarprodukt

Gegeben seien zwei n-dimensionale Vektoren v, w.
Das **Skalarprodukt** lautet:

$$v \cdot w := \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot w_i$$

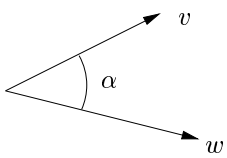
Für Vektoren a, b, c und $s \in \mathbb{R}$ gilt:

$a \cdot b$	$=$	$b \cdot a$	(Symmetrie)
$(a + c) \cdot b$	$=$	$a \cdot b + c \cdot b$	(Linearität)
$(sa) \cdot b$	$=$	$s(a \cdot b)$	(Homogenität)
$\lvert b \rvert$	$=$	$\sqrt{b \cdot b}$	(euklidische Norm)

Anwendungen des Skalarprodukts:

Gegeben zwei Vektoren v, w. Für den Winkel α zwischen v und w gilt:

$$\cos(\alpha) = \frac{v \cdot w}{|v| \cdot |w|}.$$



Es gilt:
$v \cdot w < 0 \quad \Leftrightarrow \quad v$ und w sind mehr als 90° auseinander
$v \cdot w = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v$ steht senkrecht auf w
$v \cdot w > 0 \quad \Leftrightarrow \quad v$ und w sind weniger als 90° auseinander

Es gilt: $n \cdot r = D$ beschreibt eine Ebene für $D \in \mathbb{R}$ und Normalenvektor n. Alle Lösungsvektoren r liegen (als Punkte aufgefaßt) auf der Ebene. Das Skalarprodukt aller Ebenenpunkte (als Vektoren geschrieben) mit dem Normalenvektor ist konstant.

11.5 Matrixinversion

Analog zum zweidimensionalen Fall werden die dreidimensionalen Transformationen durch Verknüpfung homogener Koordinaten mit 4×4-Transformationsmatrizen dargestellt.

Sei $A = (a_{ik})$, $1 \leq i, k \leq 4$, eine 4×4-Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Ist $D = det\ A = |a_{ik}|$ die *Determinante* von A, so bezeichnet man als *Unterdeterminante* des Elementes a_{ik} diejenige 3-reihige Determinante, die aus D durch Streichen der i-ten Zeile und der k-ten Spalte hervorgeht. Unter der *Adjunkten* A_{ik} des Elementes a_{ik} versteht man die mit dem Faktor $(-1)^{i+k}$ versehene Unterdeterminante von a_{ik}.

Beispiel:

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} = -[a_{11}(a_{32}a_{44} - a_{34}a_{42}) - a_{12}(a_{31}a_{44} - a_{34}a_{41}) + a_{14}(a_{31}a_{42} - a_{32}a_{41})]$$

Die Adjunkten sind nützlich zur Berechnung der Determinanten von A sowie der *inversen Matrix* A^{-1}:

$$\det A = \sum_{k=1}^{4} a_{1k} A_{1k} \qquad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & A_{41} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & A_{42} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{43} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} \end{pmatrix}$$

Kapitel 12

3D-Repräsentation

Die Repräsentation dreidimensionaler Objekte in der Computergrafik teilt sich in verschiedene Repräsentationsklassen, die hierarchisch aufgebaut sind.

12.1 Elementarobjekte

Für den Benutzer sollte die Beschreibung einer Szene durch *Elementarobjekte* erfolgen. Diese können unterschiedlich kompliziert sein, sollten aber durch wenige Parameter beschrieben werden können. Eine Kugel z.B. ist bereits durch Mittelpunkt und Radius eindeutig im Raum plaziert. Es ist sinnvoll, jedes Objekt in seinem eigenen, lokalen Modellkoordinatensystem zu definieren. Dessen Ursprung wird im Inneren des Objekts gewählt und das gesamte Objekt in ein Einheitsvolumen (z.B. $-1 \leq x, y, z \leq +1$) eingeschlossen. Für Orts- und Größenveränderungen sind Transformationen zuständig.

12.2 Drahtmodell

In der nächsten Repräsentationsklasse wird das Elementarobjekt als *Drahtmodell* durch eine Liste von Kanten repräsentiert. Jede Kante besteht aus zwei Punkten im kartesischen Koordinatensystem.

Beim Würfel verbinden die Kanten die Eckpunkte, bei einer Kugel werden die Längen- und Breitenkreise durch n-Ecke angenähert, wobei mit n die Güte der Approximation steigt. Das Drahtmodell skizziert nur die Umrisse eines Objekts und enthält keine zusätzlichen Flächen- oder Volumeninformationen.

12.3 Flächenmodell

Beim *Flächenmodell* werden Objekte durch approximierte oder analytische Flächen, z.B. durch eine Liste von konvexen Polygonen, repräsentiert. Ein solches Polygon wird durch seine Eckpunkte beschrieben, die durch Kanten verbunden sind.

Punkteliste	Kantenliste	Flächenliste
$P_1 : (x_1, y_1, z_1)$	$k_1 : P_1, P_2$	$F_1 : k_1, k_2, k_3$
$P_2 : (x_2, y_2, z_2)$	$k_2 : P_2, P_3$	$F_2 : k_1, k_6, k_4$
$P_3 : (x_3, y_3, z_3)$	$k_3 : P_3, P_1$	$F_3 : k_2, k_6, k_5$
$P_4 : (x_4, y_4, z_4)$	$k_4 : P_1, P_4$	$F_4 : k_3, k_4, k_5$
	$k_5 : P_4, P_3$	
	$k_6 : P_4, P_2$	

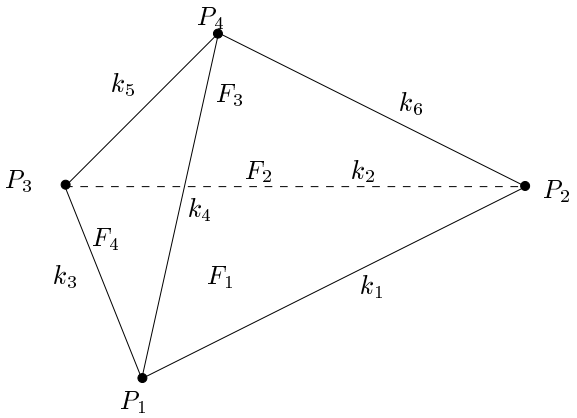


Abbildung 12.1: Tetraeder als Flächenmodell

Zur vollständigen Beschreibung einer Fläche gehört noch die Angabe, welche Seite "innen" und welche Seite "außen" liegt. Dies geschieht durch Angabe des Normalenvektors: Er steht senkrecht auf der Fläche und zeigt von innen nach außen. Für die Approximation gekrümmter Flächen wird häufig pro Eckpunkt eine Normale verwendet.

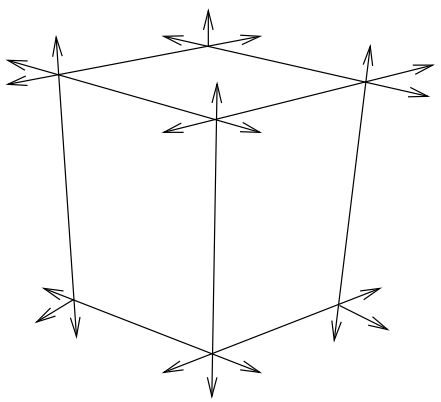


Abbildung 12.2: Würfel mit Normalenvektoren

12.4 CSG (constructive solid geometry)

Jedes Objekt wird beschrieben durch einen binären Baum, dessen Blätter beschriftet sind mit Elementarobjekten und dessen innere Knoten beschriftet sind mit den Mengenoperationen $\cup$ (Vereinigung), $\cap$ (Durchschnitt), $\setminus$ (Differenz).

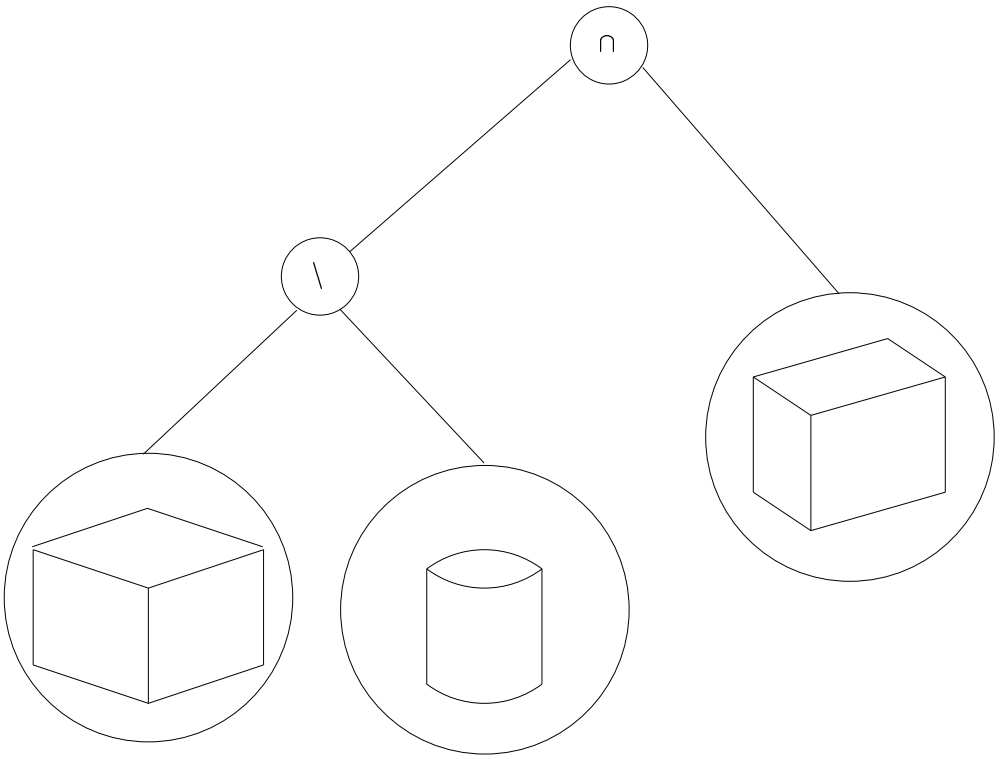


Abbildung 12.3: CSG-Repräsentation eines Körpers

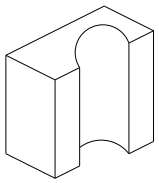


Abbildung 12.4: Darstellung des resultierenden Körpers

12.5 Flächenmodell mit Halbkantendarstellung

Jedes Objekt enthält eine Liste von Flächen, die von Halbkanten begrenzt werden. Die Halbkanten sind von außen betrachtet im Uhrzeigersinn orientiert und zeigen auf ihre jeweils linke Nachbarfläche sowie ihre Anfangs- und Endpunkte.

Die Halbkantendarstellung eignet sich zur effizienten Entfernung von verdeckten Kanten und Flächen. Eine Kante zwischen Punkt P_1 und Punkt P_2, welche die Flächen F_1 und F_2 trennt, taucht einmal als Halbkante (P_1, P_2) in der Kantenliste zu F_2 auf mit einem Verweis auf die Nachbarfläche F_1 und ein weiteres Mal als (P_2, P_1) in der Kantenliste zu F_1 mit einem Verweis auf die Nachbarfläche F_2. Werden nun alle Halbkanten einer Fläche F_1 bearbeitet, so regelt die Sichtbarkeit von F_1 und die Sichtbarkeit der jeweils anstoßenden Fläche die Sichtbarkeit der jeweiligen Halbkante. Das doppelte Zeichnen einer Kante läßt sich vermeiden, indem bei jeder Fläche vermerkt wird, ob ihre Halbkanten bereits bearbeitet wurden.

Auch die Flächennormalen können in der Datenstruktur gespeichert werden.

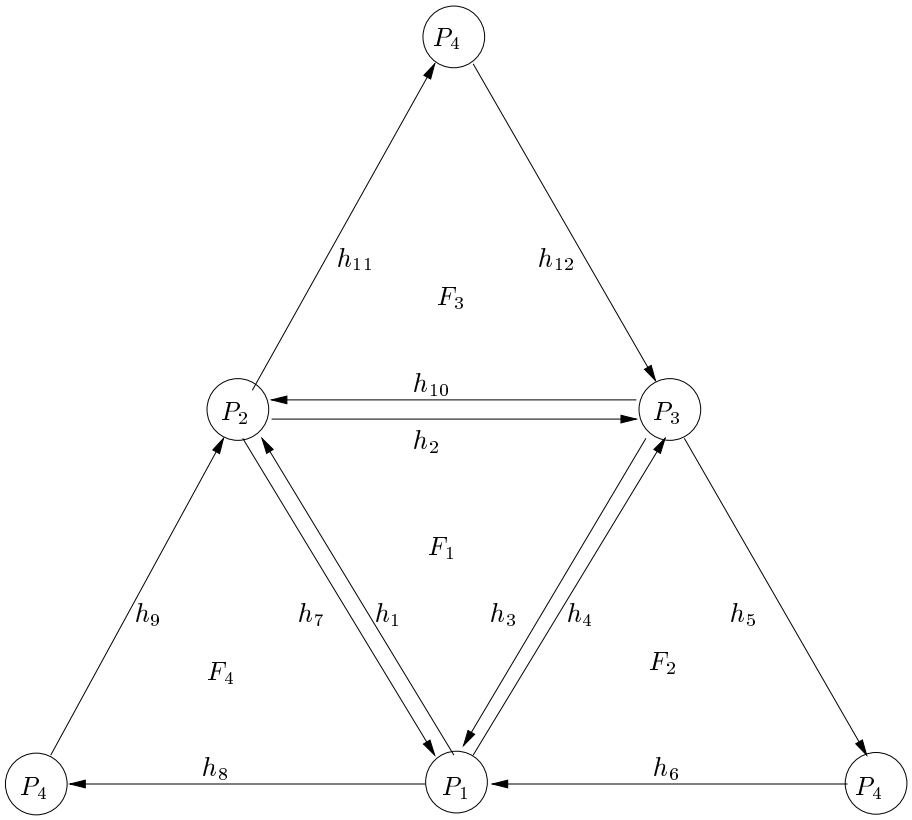


Abbildung 12.5: Tetraeder mit 4 Knoten, 12 Halbkanten, 4 Flächen

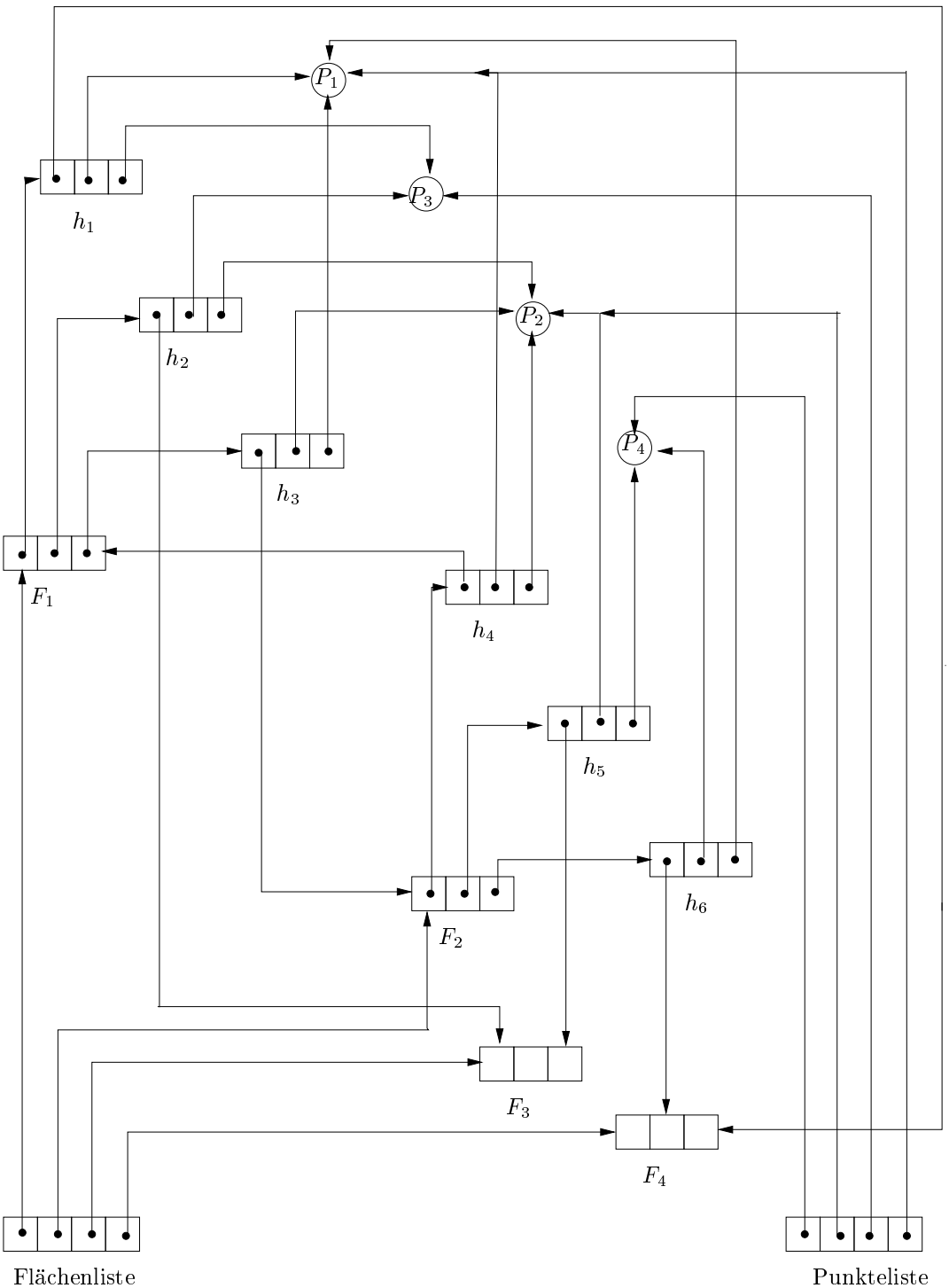


Abbildung 12.6: Objektstruktur für Tetraeder. Nicht gezeichnet sind Halbkanten für F_3 und F_4

Kapitel 13

3D-Transformationen

13.1 Translation

Mit homogenen Koordinaten läßt sich der um den Translationsvektor $t = (t_x, t_y, t_z)$ verschobene Punkt $P = (x, y, z)$

$$(x', y', z') := (x + t_x, y + t_y, z + t_z)$$

in der folgenden Form darstellen:

$$[x', y', z', 1] = [x, y, z, 1] \cdot T(t_x, t_y, t_z)$$

mit

$$T(t_x, t_y, t_z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ t_x & t_y & t_z & 1 \end{bmatrix}$$

13.2 Skalierung

Es liege der Fixpunkt im Ursprung:

$$(x', y', z') := (x \cdot s_x, y \cdot s_y, z \cdot s_z)$$

Die daraus resultierende Transformationsmatrix lautet:

$$S(s_x, s_y, s_z) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Es liege der Fixpunkt bei (Z_x, Z_y, Z_z):

1. Translation um $(-Z_x, -Z_y, -Z_z)$,
2. Skalierung um (s_x, s_y, s_z),
3. Translation um (Z_x, Z_y, Z_z).

Die Transformationsmatrix lautet:

$$T(-Z_x, -Z_y, -Z_z) \cdot S(s_x, s_y, s_z) \cdot T(Z_x, Z_y, Z_z)$$

13.3 Rotation

Rotation um die z-Achse

$$\begin{aligned} x' &:= x \cdot \cos(\delta) - y \cdot \sin(\delta) \\ y' &:= x \cdot \sin(\delta) + y \cdot \cos(\delta) \\ z' &:= z \end{aligned}$$

Die daraus resultierende Transformationsmatrix lautet:

$$R_z(\delta) = \begin{bmatrix} \cos(\delta) & \sin(\delta) & 0 & 0 \\ -\sin(\delta) & \cos(\delta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotation um die x-Achse

$$\begin{aligned} x' &:= x \\ y' &:= y \cdot \cos(\delta) - z \cdot \sin(\delta) \\ z' &:= y \cdot \sin(\delta) + z \cdot \cos(\delta) \end{aligned}$$

Die daraus resultierende Transformationsmatrix lautet:

$$R_x(\delta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\delta) & \sin(\delta) & 0 \\ 0 & -\sin(\delta) & \cos(\delta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotation um die y-Achse

$$\begin{aligned} x' &:= z \cdot \sin(\delta) + x \cdot \cos(\delta) \\ y' &:= y \\ z' &:= z \cdot \cos(\delta) - x \cdot \sin(\delta) \end{aligned}$$

Die daraus resultierende Transformationsmatrix lautet:

$$R_y(\delta) = \begin{bmatrix} \cos(\delta) & 0 & -\sin(\delta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin(\delta) & 0 & \cos(\delta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotation um eine beliebige Achse

Voraussetzung: Die Rotationsachse stimme nicht mit einer der Koordinatenachsen überein.

Idee: Transformiere Rotationsachse und Objekt so, daß die Rotationsachse mit der z-Achse übereinstimmt, rotiere um vorgegebenen Winkel δ, transformiere zurück.

1. Translation von Rotationsachse (und Objekt), so daß die Rotationsachse durch den Ursprung läuft.
2. Rotation der Rotationsachse um die x-Achse in die xz-Ebene.
3. Rotation der Rotationsachse um die y-Achse in die z-Achse.
4. Rotation des Objekts um die z-Achse mit Winkel δ.
5. Rücktransformation des gedrehten Objekts durch Anwendung der inversen Transformationen der Schritte (3), (2) und (1).

Ist die Rotationsachse durch die Punkte P_1, P_2 gegeben, so gilt

$$v = P_2 - P_1 = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}.$$

Die Länge dieses Vektors lautet

$$|v| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Die Komponenten des zugehörigen Einheitsvektors

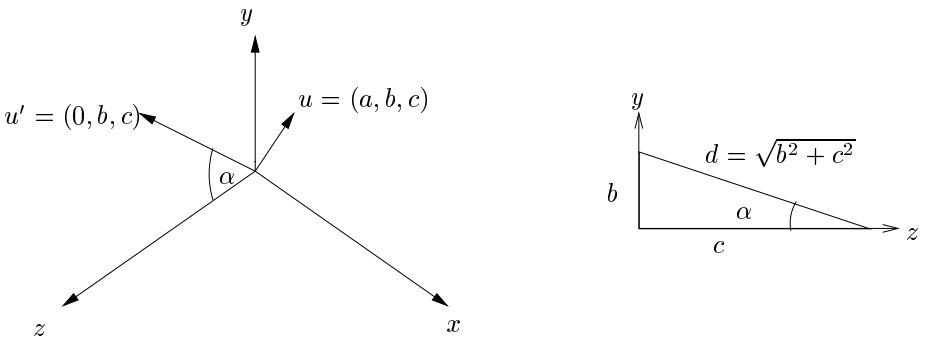
$$u = \frac{v}{|v|} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, |u| = 1$$

lauten daher

$$a = \frac{x_2 - x_1}{|v|},\ b = \frac{y_2 - y_1}{|v|},\ c = \frac{z_2 - z_1}{|v|}.$$

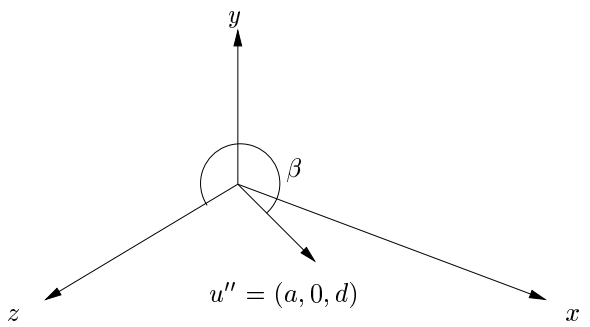
Schritt 1 läßt sich durch die Translation $T(-x_1, -y_1, -z_1)$ durchführen. Dadurch wird P_1, Ausgangspunkt des Einheitsvektors u, in den Ursprung verschoben.

Für Schritt 2 sind Sinus und Cosinus des Rotationswinkels α erforderlich, der zwischen der Projektion u' von u auf die yz-Fläche und der z-Achse, repräsentiert durch den Vektor $u_z = (0, 0, 1)$, liegt.

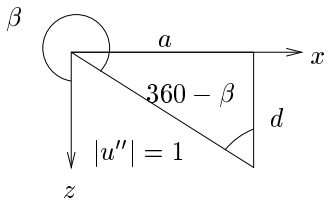


$\Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{c}{d}$
$\Rightarrow \sin(\alpha) = \frac{b}{d}$

Nach Schritt 2 befindet sich der ursprüngliche Vektor u als u'' in der xz-Ebene:



Für Schritt 3 (Rotation um y-Achse) benötigt man Sinus und Cosinus des Rotationswinkels β.



$\Rightarrow \cos(\beta) = \cos(360° - \beta) = d$
$\Rightarrow \sin(\beta) = -\sin(360° - \beta) = -a$

Nach den ersten drei Schritten ist die Drehachse mit der z-Achse identisch, so daß Schritt (4) mit der Rotationsmatrix $R_z(\delta)$ durchgeführt werden kann. Schritt (5) beinhaltet die Anwendung der inversen Transformationen.

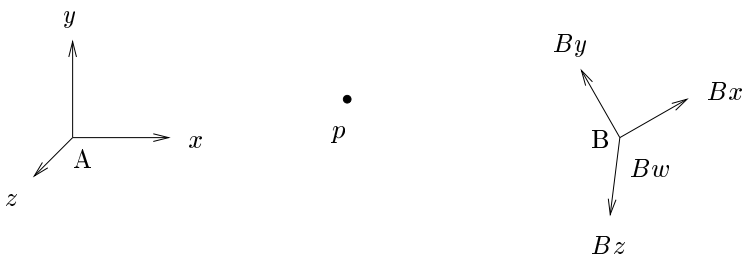
Die Rotation um die Achse $v = \overline{P_1 P_2}$ um den Winkel δ läßt sich daher wie folgt darstellen:

$$R(v, \delta) = T(-P_1) \cdot R_x(\alpha) \cdot R_y(\beta) \cdot R_z(\delta) \cdot R_y^{-1}(\beta) \cdot R_x^{-1}(\alpha) \cdot T(P_1)$$

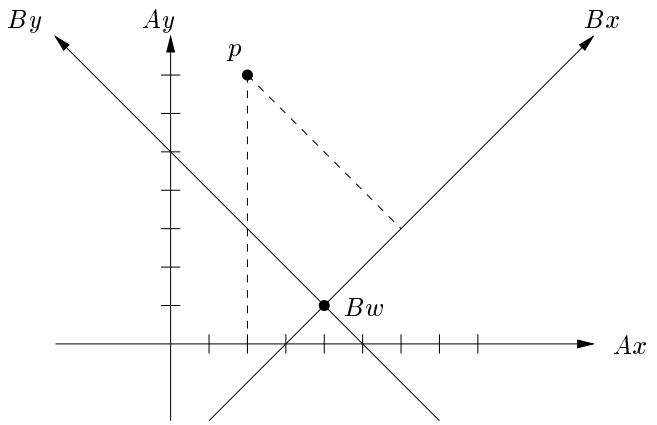
13.4 Transformation von Koordinatensystemen

Die Transformation von einem Koordinatensystem in ein anderes bedeutet einen Basiswechsel und läßt sich folgendermaßen formalisieren: Gegeben sei ein Koordinatensystem A, in dem ein anderes Koordinatensystem B durch die homogenen Koordinaten des Ursprungs (Bw) und die drei normierten Richtungsvektoren der Achsen (Bx, By, Bz) definiert ist. Zeilenweise angeordnet ergeben diese Vektoren die Matrix B_A, die den Übergang vom Koordinatensystem B zum Koordinatensystem A beschreibt:

$$B_A = \begin{bmatrix} Bx \\ By \\ Bz \\ Bw \end{bmatrix}$$



Beispiel (für den 2-dimensionalen Fall):



x-Achse:	Bx	lautet	$[\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}, 0]$
y-Achse:	By	lautet	$[-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}, 0]$
Ursprung:	Bw	lautet	$[4, 1, 1]$
Punkt:	p_B	lautet	$[2 \cdot \sqrt{2}, 4 \cdot \sqrt{2}, 1]$

Der Aufbau der Matrix B_A repräsentiert die erforderliche Drehung und Verschiebung, um einen aus der Sicht von Koordinatensystem B beschriebenen Punkt p aus der Sicht von Koordinatensystem A zu beschreiben. Im zwei-dimensionalen Fall wird zunächst der Punkt

p um den Winkel α gedreht, der sich zwischen den Achsen der Koordinatensysteme A und B befindet. Dann wird eine Translation durchgeführt mit dem Wert der Ursprungsposition von B. Cosinus und Sinus des Drehwinkels α ergeben sich gerade aus den Werten a bzw. b, wobei die Einheitsvektoren (a, b) und $(-b, a)$ die Basis für Koordinatensystem B darstellen.

Also läßt sich in obigem Beispiel der Punkt p wie folgt transformieren:

$$[2 \cdot \sqrt{2}, 4 \cdot \sqrt{2}, 1] \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}} & 0 \\ -\sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}} & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} = [2,\ 7,\ 1]$$

Um einen Punkt p_A des Koordinatensystems A im Koordinatensystem B zu spezifizieren, verwendet man die inverse Matrix zu B_A:

$$\begin{aligned} & p_B \cdot (B_A) = p_A \\ \Rightarrow \quad & p_B = p_A \cdot (B_A)^{-1}. \end{aligned}$$

13.5 Transformation der Normalenvektoren

Die Normalenvektoren müssen bei der Transformation von Objektpunkten ebenfalls abgebildet werden. Allgemein gilt, daß bei der Transformation eines Objekts mit der Matrix M ein Normalenvektor n dieses Objekts mit der transponierten Inversen von M abgebildet werden muß:

$$n' = n \cdot (M^{-1})^T \ .$$

Beweis: Sei n der Normalenvektor einer Ebene, seien r_1 und r_2 beliebige Punkte in der Ebene. Betrachte n, r_1 und r_2 als Zeilenvektoren und arbeite mit dem Matrixprodukt (Zeile mal Spalte).

Dann gilt:

$$(r_1 - r_2) \cdot n^T = 0$$

Bei einem Wechsel des Koordinatensystems werden die Ortsvektoren r_1 und r_2 mit der Matrix M transformiert:

$$\begin{aligned} r_1' &= r_1 \cdot M \\ r_2' &= r_2 \cdot M \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} & (r_1 - r_2) \cdot n^T && = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (r_1 - r_2) \cdot (M \cdot M^{-1}) \cdot n^T && = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & ((r_1 - r_2) \cdot M) \cdot (M^{-1} \cdot n^T) && = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (r_1' - r_2') \cdot (n \cdot (M^{-1})^T)^T && = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (r_1' - r_2') \cdot (n')^T && = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad n' = n \cdot (M^{-1})^T$$

Kapitel 14

Projektion

14.1 Bildebene

Für die Anzeige am zweidimensionalen Ausgabegerät muß eine Abbildung (*Projektion*) der räumlichen, dreidimensionalen Szene auf eine *Projektionsebene* erfolgen.

Gegeben sind

- das zu projizierende Objekt,
- die Bildebene,
- das Projektionszentrum.

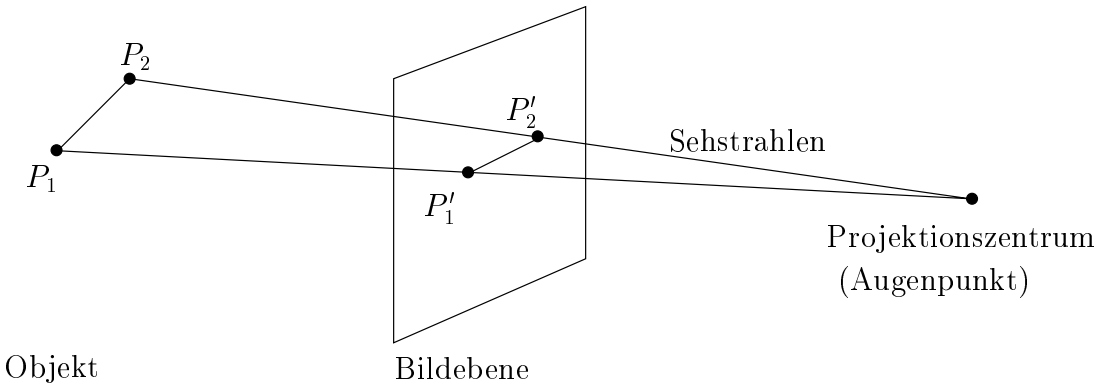
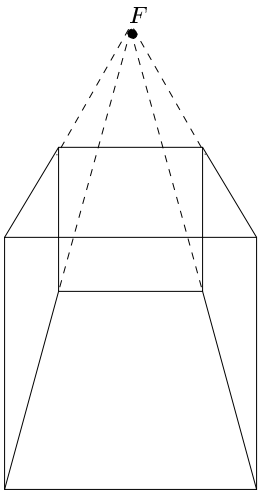


Abbildung 14.1: Zentralprojektion

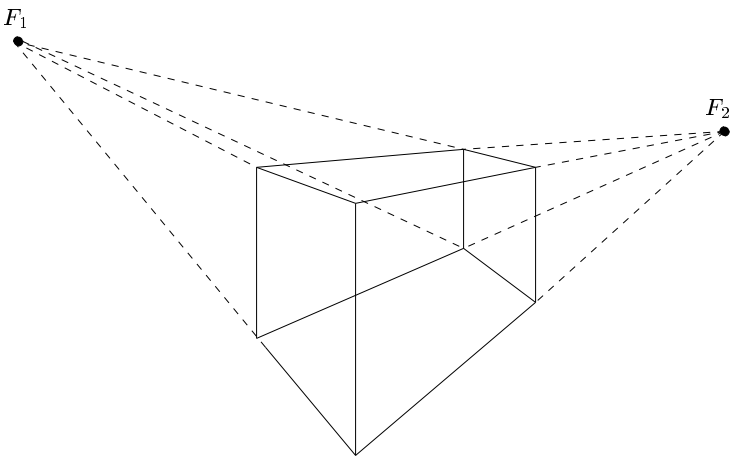
Ist der Abstand des Projektionszentrums von der Bildebene endlich, so handelt es sich um eine Zentralprojektion (perspektivische Projektion), andernfalls handelt es sich um eine Parallelprojektion (die Projektionsstrahlen sind zueinander parallel).

14.2 Perspektivische Projektion

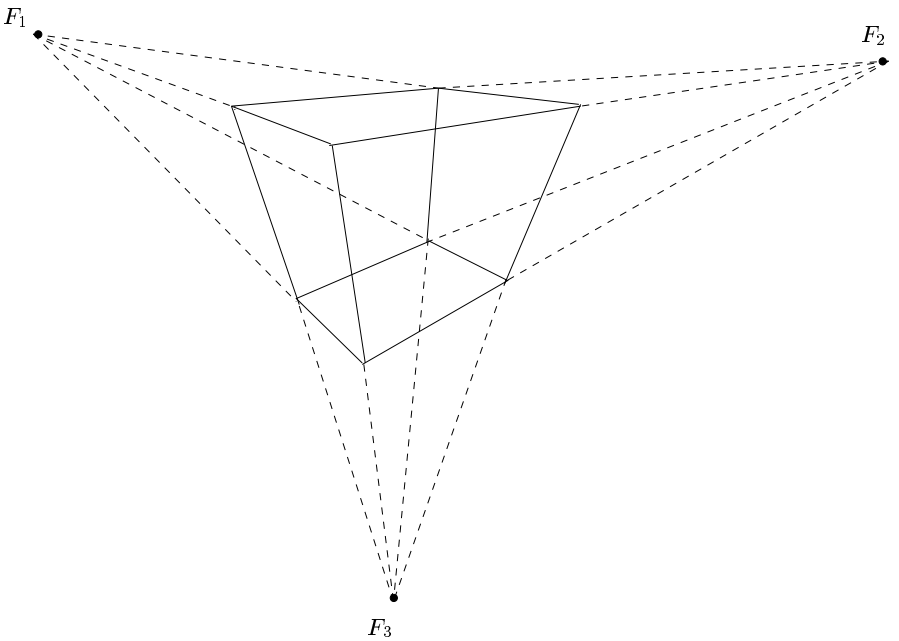
Die abgebildeten Objekte werden proportional zu ihrem Abstand zur Bildebene verkleinert. Je nachdem, ob die Bildebene eine, zwei oder drei der Koordinatenachsen schneidet, entstehen ein, zwei oder drei Fluchtpunkte.



1 Fluchtpunkt F



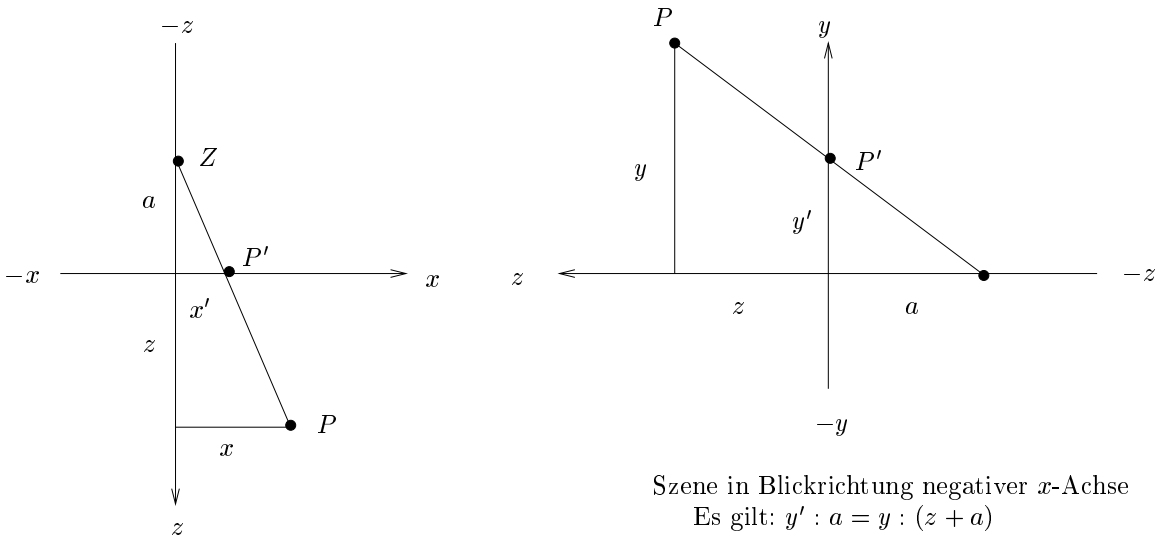
2 Fluchtpunkte F_1, F_2



3 Fluchtpunkte F_1, F_2, F_3

Abbildung 14.2: Zentralprojektionen mit unterschiedlich vielen Fluchtpunkten

OBdA sei die Bildebene gleich der xy-Ebene, und das Projektionszentrum liege auf der negativen z-Achse im Punkt $Z = (0, 0, -a)$. Gegeben Punkt $P = (x, y, z)$. Gesucht sind auf der Bildebene die Koordinaten des projizierten Bildpunktes $P' = (x', y', 0)$.



Szene in Blickrichtung negativer y-Achse
Es gilt: $x' : a = x : (a + z)$

Szene in Blickrichtung negativer x-Achse
Es gilt: $y' : a = y : (z + a)$

Abbildung 14.3: Anwendung der Strahlensätze

Betrachtet man die Szene "von oben" und "von der Seite", so erhält man aufgrund der Strahlensätze die Beziehung

$$x' = \frac{x}{1 + z/a} , \qquad y' = \frac{y}{1 + z/a} , \qquad z' = 0.$$

Die homogenen Koordinaten des projizierten Punktes lauten

$$P' = [x/w, y/w, 0, 1] = [x, y, 0, w] \text{ mit } w = 1 + z/a.$$

Für die Transformationsmatrix der perspektivischen Projektion ergibt sich also:

$$P_{persp_{xy}}(-a) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

14.3 Parallelprojektion

14.3.1 Normalprojektionen

Stehen die Sehstrahlen normal zur Bildebene, liegt eine *orthogonale* Projektion vor.

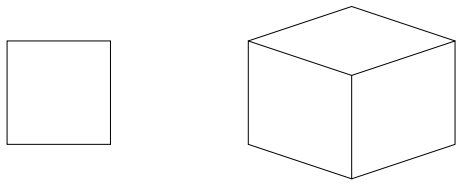


Abbildung 14.4: Grund-, Seiten-, Aufriss (a) bzw. axononometrische Projektion (b)

Die häufigste Anwendung orthogonaler Projektionen liegt in der Darstellung eines Objekts durch *Grund-*, *Auf-* und *Seitenriß* (Abbildung 14.4 a).

Eine weitere Form der Normalprojektionen sind die *axonometrischen Projektionen*, bei denen die Bildebene auf keiner der Körper-Hauptachsen senkrecht steht. Dadurch sind in der Abbildung mehrere zueinander normal stehende Flächen gleichzeitig sichtbar. Die resultierenden Darstellungen sind der perspektivischen Projektion ähnlich. Anstelle der zur Entfernung vom Auge proportionalen Verkürzung erfolgt aber eine gleichmäßige Verkürzung aller Kanten (Abbildung 14.4 b).

Die Transformationsmatrix für die orthogonale Parallelprojektion auf die xy-Ebene lautet

$$P_{ortho_{xy}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

da für jeden Punkt $P = [x, y, z, 1]$ die Koordinaten des projizierten Punktes gleich $[x, y, 0, 1]$ sind.

14.3.2 Schiefe Projektionen

Bei den *schiefen* Parallelprojektionen stehen die Sehstrahlen nicht normal auf der Bildebene, sondern schneiden sie unter dem Winkel β (Abbildung 14.5). Die schiefe Projektion auf die xy-Ebene entspricht einer Scherung der x- und y-Koordinaten proportional zu z.

Seien $P_0 = (x, y, 0)$ die orthogonale und $P' = (x', y', 0)$ die schiefe Projektion von Punkt $P = (x, y, z)$. Sei L die Entfernung von P_0 nach P'. Dann gilt

$$\begin{aligned} x' &= x - L \cdot \cos(\alpha) \\ y' &= y + L \cdot \sin(\alpha) \\ z' &= 0 \end{aligned}$$

Wegen $\tan(\beta) = \frac{z}{L}$ folgt

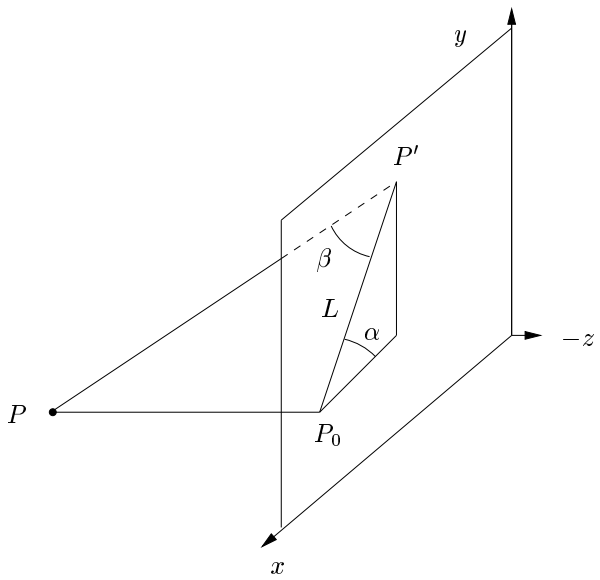


Abbildung 14.5: Bildebene bei der schiefen Projektion

$$x' = x - z \cdot \frac{\cos(\alpha)}{\tan(\beta)}$$
$$y' = y + z \cdot \frac{\sin(\alpha)}{\tan(\beta)}$$

Der Winkel β regelt im projizierten Bild das Verhältnis von x-Ausdehnung zu z-Ausdehnung. Die Koordinaten zweier projizierter Punkte P_1', P_2' lauten:

$$x_1' = x_1 - z_1 \cdot \cos(\alpha)/\tan(\beta)$$
$$y_1' = y_1 + z_1 \cdot \sin(\alpha)/\tan(\beta)$$
$$x_2' = x_2 - z_2 \cdot \cos(\alpha)/\tan(\beta)$$
$$y_2' = y_2 + z_2 \cdot \sin(\alpha)/\tan(\beta)$$

Für zwei Punkte, die sich nur bzgl. ihrer z-Koordinaten unterscheiden, betragen die Abstände ihrer Bilder in x- bzw. y-Richtung

$$|x_1' - x_2'| = |(z_1 - z_2) \cdot \cos(\alpha)/\tan(\beta)|$$
$$|y_1' - y_2'| = |(z_1 - z_2) \cdot \sin(\alpha)/\tan(\beta)|$$

für den Abstand $|P_1' - P_2'| = \sqrt{|x_1' - x_2'|^2 + |y_1' - y_2'|^2}$ ergibt sich

$$|P_1' - P_2'| = \sqrt{\frac{(z_1 - z_2)^2}{\tan^2(\beta)} \cdot (\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha))} = \frac{z_1 - z_2}{\tan(\beta)}$$

wegen $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$.

Für die Berechnung der Transformationsmatrix benötigt der Algorithmus den Verkürzungsfaktor d und den Scherwinkel α. d gibt an, um welchen Faktor zur Bildebene normal stehende

Strecken verkürzt werden. Es gilt

$$d = \frac{1}{\tan(\beta)} .$$

α definiert den Winkel zur Horizontalen, unter dem diese Kanten aufgetragen werden. Für die Koordinaten des so projizierten Punktes $P = (x, y, z, 1)$ gilt

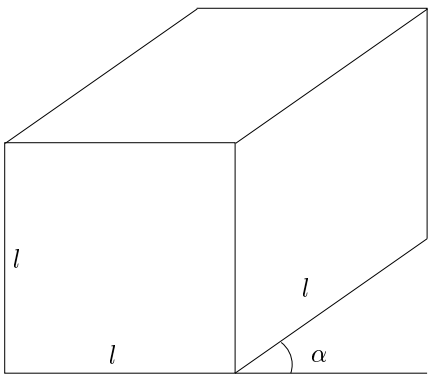
$$\begin{aligned} x' &= x - z \cdot (d \cdot \cos(\alpha)), \\ y' &= y + z \cdot (d \cdot \sin(\alpha)), \\ z' &= 0, \\ w' &= 1 \end{aligned}$$

Die entsprechende Transformationsmatrix lautet

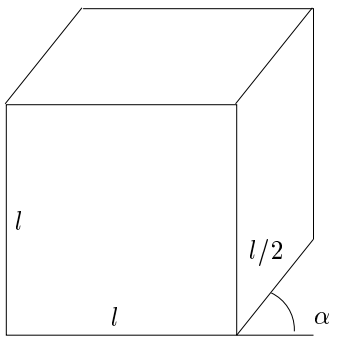
$$P_{schief_{xy}}(\alpha, d) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -d \cdot \cos(\alpha) & d \cdot \sin(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Für $d = 0$ ($\beta = 90°$) ergibt sich daraus die orthogonale Projektion. Bei schiefen Projektionen ist der Wert für d immer ungleich Null.

Zwei häufig als Ersatz für Perspektive verwendete Projektionen haben die Werte $d = 1$ ($\beta = 45°$), $\alpha = 35°$ (*Kavalierprojektion*) und $d = 0.5$ ($\beta = 63.43°$), $\alpha = 50°$ (*Kabinettprojektion*). Bei der Kavalierprojektion werden alle auf der Bildebene normal stehenden Strecken unverkürzt abgebildet. Bei der Kabinettprojektion ergibt sich eine Verkürzung auf die Hälfte ihrer ursprünglichen Länge.



Kavalierprojektion: $\beta = 45°$
kombiniert mit $\alpha = 35°$



Kabinettprojektion: $\beta = 63.43°$
kombiniert mit $\alpha = 50°$

Abbildung 14.6: Zwei schiefe Projektionen

Kapitel 15

Betrachtungstransformationen

Die Abbildung dreidimensionaler Objekte auf den Bildschirm wird in eine Reihe von Elementartransformationen zerlegt:

- Konstruktion von komplexen Szenen aus elementaren Objekten (*Modeling*),
- Festlegen der Bildebene (*View Orientation*),
- Projektion auf ein normiertes Gerät (*View Mapping*),
- Abbildung auf ein Ausgabegerät (*Device Mapping*).

15.1 Die synthetische Kamera

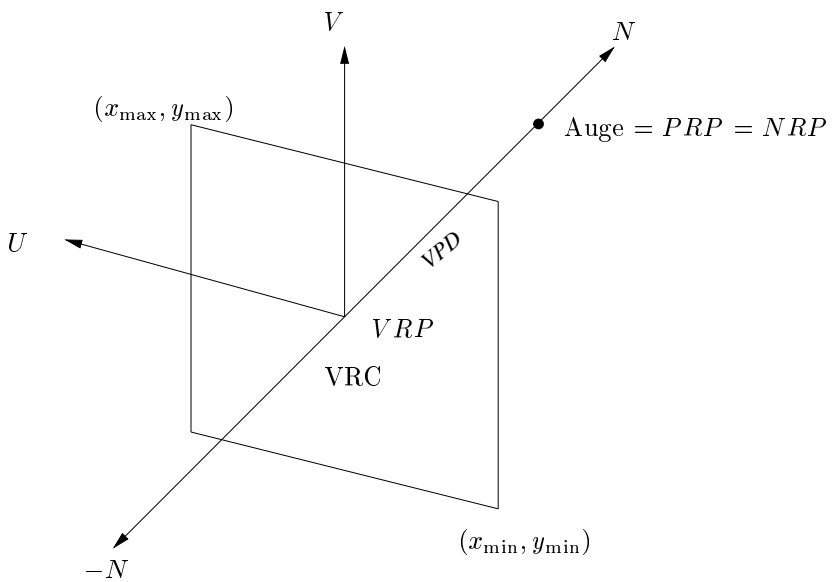


Abbildung 15.1: Parameter zur Beschreibung der syntetischen Kamera

Die Parameter zur Durchführung der 3D-auf-2D-Abbildung (*viewing transformation*) sind im wesentlichen die Position und Orientierung einer *synthetischen Kamera* und ein Punkt in der Szene, auf den die Kamera fokussiert ist: Der View Reference Point (VRP).

Die View Plane ist die Bildebene, auf die die Szene projiziert wird. Diese ist definiert durch die View Plane Normal N, die Richtung, aus der die Kamera die Szene aufnimmt, und den VRP. Die Kamera befindet sich im NRP (Projection oder Normal Reference Point), der dem Augenpunkt eines natürlichen Betrachters entspricht.

Die Orientierung der Kamera wird durch den View Up Vector (VUV) festgelegt. Durch Projektion des VUV in die View Plane erhält man den Vektor V. Der Vektor U in der View Plane wird so gewählt, daß U, V, N ein rechtshändiges kartesisches Koordinatensystem bilden, das sogenannte View Reference Coordinate System VRC mit dem VRP als Ursprung und dem Augenpunkt NRP auf der positiven N-Achse bei $N = VPD$ (View Plane Distance).

Die beiden Punkte in den UV-Koordinaten der Viewplane $(x_{\min}, y_{\min})$, $(x_{\max}, y_{\max})$ legen das sogenannte View Window fest, d.h., was von der Szene zu sehen ist (entspricht der Brennweite eines Kameraobjektivs). Der sichtbare Teil kann noch weiter eingeschränkt werden durch Angabe einer *front plane* und einer *back plane*.

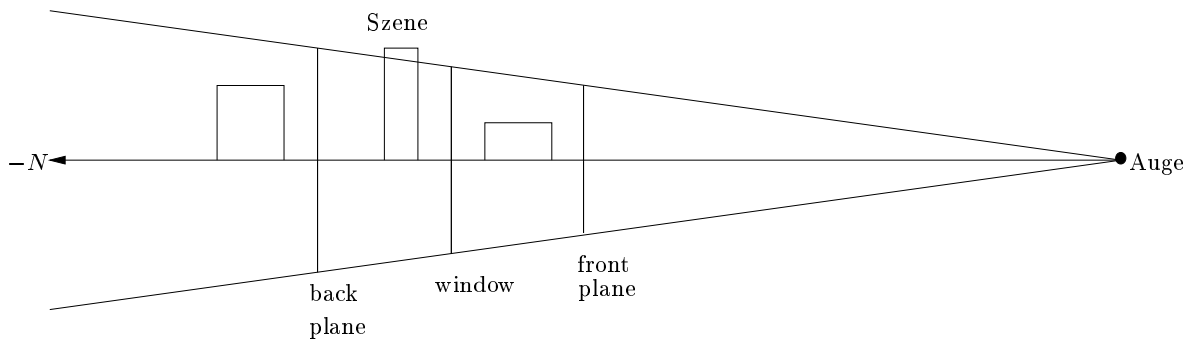


Abbildung 15.2: Einschränkung des sichtbaren Teils

Bemerkung: Zur Berechnung der Projektion auf die Bildebene ist es unerheblich, wo die Bildebene in der Szene arrangiert ist.

15.2 Viewing Pipeline

Folgende Informationen sind erforderlich:

- Jedes Objekt wird beschrieben durch Modellkoordinaten (z.B. Würfel ist beschrieben durch Mittelpunkt $(0, 0, 0)$ und Kantenlänge 1).
- Die Szene wird beschrieben durch eine Menge von Objekten, deren Lage und Größe in Weltkoordinaten beschrieben sind.
- Die synthetische Kamera wird beschrieben durch $U, V, N, VPD, (x_{\max}, y_{\max}), (x_{\min}, y_{\min})$.

Folgende Abkürzungen werden verwendet:

MC	model coordinate system
WC	world coordinate system
VRC	view reference coordinate system
NPC	normalized projection coordinate system
DC	device coordinate system

Jedes Polygon durchläuft die folgende Viewing-Pipeline:

1.) Modeling: MC $\rightarrow$ WC
Beschreibe Polygonpunkte in Weltkoordinaten (dies geschieht durch Translation, Rotation und Skalierung).

2.) View Orientation: WC $\rightarrow$ VRC
Beschreibe Polygonpunkte bzgl. des UVN-Systems (dies geschieht durch Wechsel des Koordinatensystems, anschließend ist die Szene beschrieben mit xy-Ebene = Bildebene, das Auge liegt bei $z = VPD$).

3.) View Mapping: VRC $\rightarrow$ NPC
Transformiere die Szene derart, daß der sichtbare (= im Pyramidenstumpf aus view window, front plane, back plane liegende) Teil abgebildet wird auf einen Einheitswürfel, dessen Vorder- und Rückseite der *front plane* bzw. *back plane* entsprechen. Clippe jede Polygonkante am Einheitswürfel.

4.) Device Mapping: NPC $\rightarrow$ DC
Bilde jeden Bildpunkt auf Gerätekoordinaten ab = übernimm x, y-Koordinaten; z liefert Tiefeninformation.

Beim Flächenmodell werden nach dem Clipping in Schritt 3.) die Polygone in Dreiecke zerlegt. Die Dreiecke sind versehen mit den Normalen bzgl. des Weltkoordinatensystems. Diese werden benötigt für das Schattieren der Dreiecke.

15.2.1 Modeling-Transformationen

Punkt 1.) wird *Modeling* genannt: Das Anordnen von Objekten aus dem *Modellkoordinatensystem* (MC) zu einer Szene in dem sogenannten *Weltkoordinatensystem* (WC). Im MC liegen die Objekte als Prototypen vor. Ihre Definitionspunkte sind unabhängig von der späteren Größe und Position im WC in Modellkoordinaten gegeben. Der Ursprung des MC befindet sich sinnvollerweise im Zentrum des Objekts. Erst durch das Modeling erhalten die Objekte im WC ihre individuelle Größe, Orientierung und Position. Dieses wird im wesentlichen durch drei Arten von Transformationen realisiert: Translation, Rotation und Skalierung.

15.2.2 View Orientation

Zur Abbildung einer dreidimensionalen Szene aus den Weltkoordinaten auf den Bildschirm muß eine natürliche Betrachtersicht (*View Orientation*) definiert werden. Eine solche Betrachtersicht besteht aus den Viewing-Parametern

- Betrachterstandpunkt NRP (*Normal Reference Point*; auch *Eyepoint*),
- Blickrichtung VRP (*View Reference Point*),
- vertikale Orientierung VUV (*View Up Vector*) oder VUP (*View Up Point*),
- Blickwinkel (Brennweite).

Der fiktive Betrachter blickt vom NRP in Richtung VRP und kippt dabei die Kamera so um die Blickrichtung, daß VUP von ihm aus gesehen vertikal nach oben zeigt. Der Blickwinkel entspricht der Brennweite und regelt den Bildausschnitt (*Zooming*).

Durch diese Parameter wird das VRC (*View Reference Coordinate System*) definiert mit VRP als Ursprung und NRP auf der positiven z-Achse. Die xy-Ebene wird als *View Plane* bezeichnet und steht senkrecht auf der Blickrichtung. Die y-Achse ist gegeben durch die Projektion von VUP in die View Plane. Deshalb darf VUP nicht parallel zur Blickrichtung sein.

Das VRC hat die gleiche Metrik wie das WC. Es handelt sich also um einen Wechsel des Koordinatensystems.

Der Abstand zwischen VRP und NRP wird als VPD (*View Plane Distance*) bezeichnet.

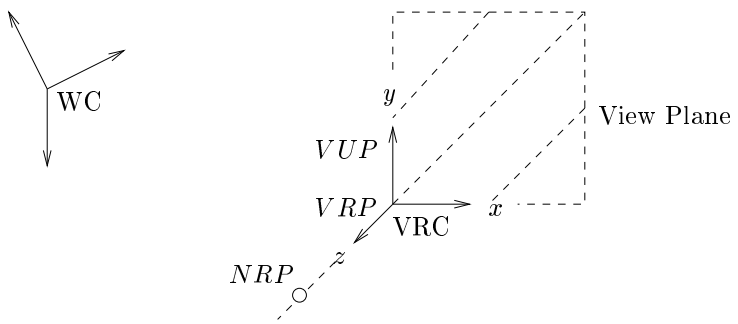


Abbildung 15.3: Definition des VRC

Für die Anwendung des Viewings ergeben sich im Programm verschiedene Möglichkeiten:

- Soll ein Objekt von verschiedenen Seiten betrachtet werden, so wird VRP in das Objekt gelegt. Durch NRP läßt sich nun die Blickrichtung frei wählen. Der Vektor VUP kann dabei konstant bleiben, sofern nicht senkrecht von oben oder unten geschaut wird.
- Soll sich die Szene bei konstantem Standpunkt um den Betrachter drehen, wird NRP festgesetzt. Durch Veränderung des VRP bewegt sich dann die Szene vor dem Auge des Betrachters. Der VUP kann dabei konstant bleiben, solange er nicht kollinear zum Vektor durch VRP und NRP wird.
- Eine weitere Möglichkeit sind Animationen, bei denen sich z.B. der Beobachter vorwärts in die Szene hineinbewegt. Dieser Effekt läßt sich durch Verschieben von VRP und NRP um denselben Vektor erzielen.

15.2.3 View Volume

Bei einer Kamera ist der maximal abbildbare Ausschnitt einer Szene durch das Objektiv festgelegt. Im Programm wird zur Erzielung desselben Effekts ein rechteckiger Ausschnitt aus der Bildebene — das *Window* — gewählt. Das Seitenverhältnis entspricht dem des Ausgabegeräts. Durch das View Window und die gewählte Projektion wird ein Bildraum definiert, der *View Volume* genannt wird. Nur jene Objekte und Objektteile, die sich innerhalb dieses Bildraumes befinden, werden auf die Bildebene (und dadurch in das View Window) abgebildet.

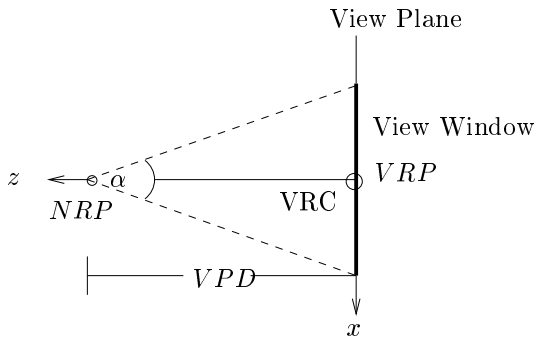


Abbildung 15.4: Definition des View Windows

Die Form des Bildraumes ist bei der perspektivischen Projektion eine unendliche Pyramide, deren Spitze im Projektionszentrum PRP (*Projection Reference Point*) liegt und deren Kanten durch die Eckpunkte des View Windows verlaufen. Hierbei wird im Programm der Betrachterstandpunkt NRP als Projektionszentrum gewählt.

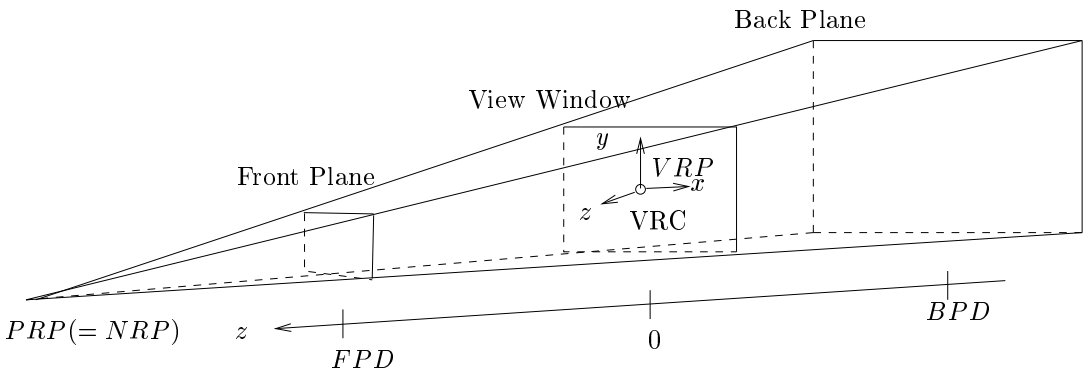


Abbildung 15.5: Bildraum bei perspektivischer Projektion

Die Begrenzung des Bildraumes in Richtung der z-Achse des VRC erfolgt durch zwei zur View Plane parallele Ebenen, die *Front* und *Back Plane* genannt werden. Die Front Plane liegt vom Projektionszentrum PRP aus gesehen vor der Back Plane. Ihre z-Komponenten werden als *Front Plane Distance* (FPD) und *Back Plane Distance* (BPD) bezeichnet. Es gilt $BPD < FPD$. Mit diesen Ebenen können Teile der Szene von der Projektion auf die Bildebene ausgeschlossen werden. Speziell bei der perspektivischen Projektion erweist sich diese Möglichkeit als notwendig, da sonst sehr nahe Objekte alle anderen verdecken bzw. sehr

weit entfernte als nicht mehr erkennbare (d.h. zu kleine) Figuren abgebildet würden. Mit Front und Back Plane ergibt sich als View Volume ein Pyramidenstumpf.

15.2.4 View Mapping

Statt nun das View Volume aus dem VRC direkt auf den Bildschirm zu projizieren, wird im Programm eine weitere Transformation durchgeführt, die nicht nur zur Effizienzsteigerung des Algorithmus führt, sondern auch die Projektion der Szene auf die Bildebene erleichert: Der Bildraum wird in einen zur Bildebene normal ausgerichteten Einheitswürfel ($0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1; 0 \leq z \leq 1$) umgewandelt. Anstelle mehrerer unterschiedlicher Projektionen muß so anschließend nur noch die orthogonale Parallelprojektion auf die Ebene $z = 0$ durchgeführt werden. Das sogenannte *View Mapping* wird deshalb auch als Ausgabe auf einen normierten Bildschirm bezeichnet. Das Koordinatensystem, in dem sich der Einheitswürfel befindet, heißt *Normalized Projection Coordinate System* (NPC). Der Betrachterstandpunkt befindet sich im Unendlichen auf der positiven z-Achse und hat die homogenen Koordinaten $(0, 0, 1, 0)$. Vom Betrachter aus gesehen liegt im NPC der Punkt $(0, 0, 0)$ "links unten hinten" und $(1, 1, 1)$ "rechts oben vorne".

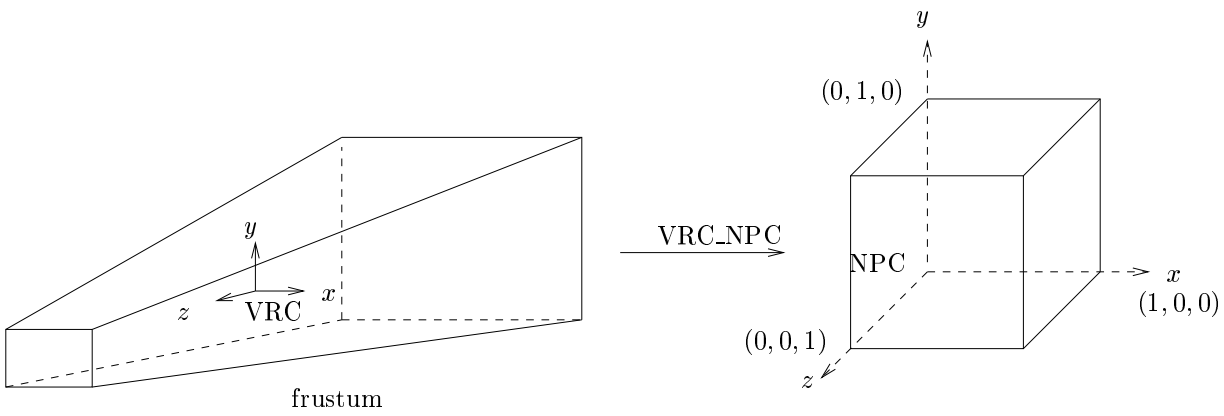


Abbildung 15.6: View Mapping

Bei der perspektivischen Projektion wird in einem ersten Schritt der Pyramidenstumpf, der den Bildraum darstellt und *frustum* genannt wird, auf einen regelmäßigen Pyramidenstumpf abgebildet. Dessen Grundfläche ist ein Quadrat, das mit jeder Seitenfläche einen Winkel von 45° einschließt. Dabei werden die z-Koordinaten nicht und die x- und y-Koordinaten proportional zur z-Koordinate verändert, was einer Scherung an der z-Achse entspricht. Im zweiten Schritt wird der regelmäßige Pyramidenstumpf in den normierten Einheitswürfel transformiert. Dazu müssen die x- und y-Koordinaten proportional zu den reziproken z-Werten skaliert werden. Die Front Plane entspricht im NPC der Ebene $z = 1$ und die Back Plane der Ebene $z = 0$.

Beide Schritte werden im Programm zu einer Transformationsmatrix zusammengefaßt. Bei deren Anwendung auf die homogenen Koordinaten ist zu beachten, daß die resultierenden Punkte im allgemeinen w-Werte ungleich 1 haben, die affinen Koordinaten also erst nach der Division durch w vorliegen. Außerdem ist diese Abbildung nur bezüglich der x- und y-

Koordinaten linear. In z-Richtung werden die Werte durch die Scherung im zweiten Schritt reziprok verzerrt, d.h., äquidistante Punkte längs der z-Achse im VRC häufen sich im NPC bei $z = 0$ nahe der Back Plane.

Zur Erleichterung der Herleitung wird zunächst das Koordinatensystem so transformiert, daß der PRP im Ursprung sitzt. Danach wird das Koordinatensystem an der xy-Ebene gespiegelt, indem die z-Koordinaten mit -1 multipliziert werden. Danach ist das Koordinatensystem linkshändig. Es seien d_{min}, d, d_{max} die Abstände der Frontplane, Bildebene, Backplane vom Augenpunkt.

Zur Durchführung von Punkt 3.) der Viewing Pipeline wird zunächst die abgeschnittene Pyramide (= frustum) transformiert in einen symmetrischen Pyramidenstumpf mit quadratischer Grundfläche und Kanten unter 45°.

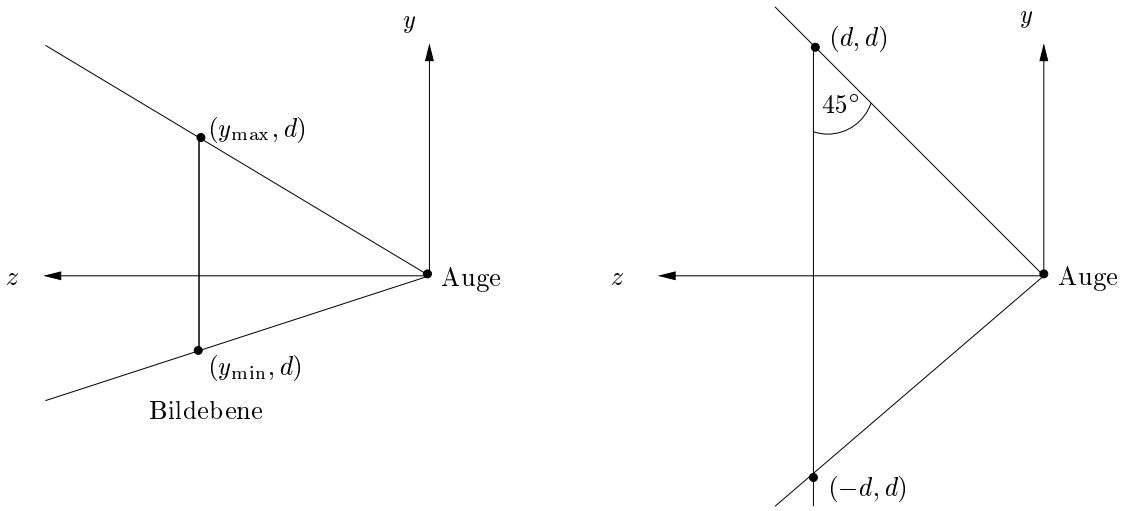


Abbildung 15.7: Überführung in Pyramidenstumpf

Es müssen also die y-Koordinaten proportional zur z-Koordinate verändert werden. Dies entspricht einer Scherung an der z-Achse und Skalierung, d.h.

$$\begin{aligned} y' &= k_1 \cdot y + k_2 \cdot z \\ z' &= z \end{aligned}$$

Punkt $(y_{\max}, d)$ soll abgebildet werden auf (d, d);
Punkt $(y_{\min}, d)$ soll abgebildet werden auf $(-d, d)$.

Durch Lösen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} d &= k_1 \cdot y_{\max} + k_2 \cdot d \\ -d &= k_1 \cdot y_{\min} + k_2 \cdot d \end{aligned}$$

erhält man

$$k_1 = \frac{2d}{y_{\max} - y_{\min}}, \quad k_2 = -\frac{y_{\max} + y_{\min}}{y_{\max} - y_{\min}}$$

Analoge Scherung der x-Werte ergibt:

$$k_1 = \frac{2d}{x_{\max} - x_{min}}, \quad k_2 = -\frac{x_{\max} + x_{\min}}{x_{max} - x_{min}}$$

Als nächstes wird die regelmäßige Pyramide in den Einheitswürfel ($0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$) transformiert. Die *front plane* entspricht der Ebene $z = 0$ und die *back plane* der Ebene $z = 1$.

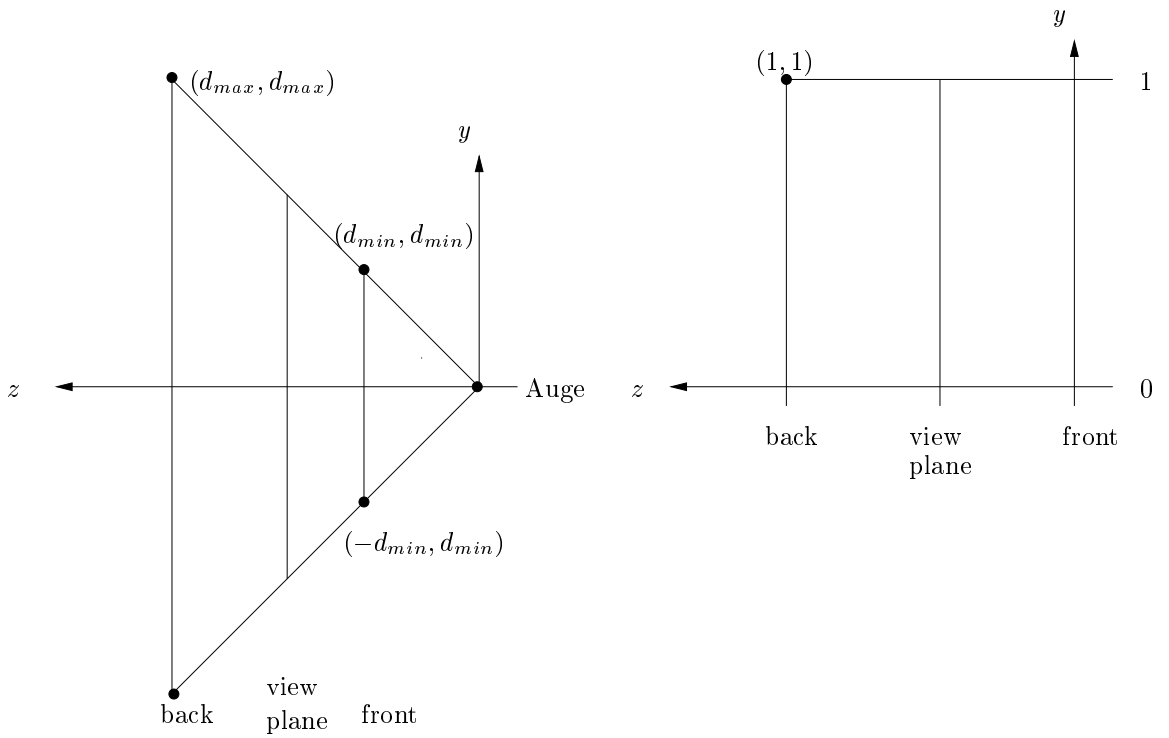


Abbildung 15.8: Überführung in Einheitswürfel

Da die y-Werte proportional zu den reziproken z-Werten skaliert werden müssen, ergibt sich als Transformation

$$\begin{aligned} y' &= k_1 + k_2 \cdot \frac{y}{z} \\ z' &= k_3 + k_4 \cdot \frac{1}{z} \end{aligned}$$

Der Kehrwert von z im Term zu z' ist erforderlich wegen der Verwendung von homogenen Koordinaten mit 4×4-Transformationsmatrizen.

Punkt $(d_{\max}, d_{\max})$ soll abgebildet werden auf $(1, 1)$,
Punkt $(-d_{\min}, d_{\min})$ soll abgebildet werden auf $(0, 0)$.
Durch Lösen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 1 &= k_1 + k_2 \cdot \frac{d_{\max}}{d_{\max}} \\ 0 &= k_1 + k_2 \cdot \frac{-d_{\min}}{d_{\min}} \end{aligned}$$

erhält man

$$k_1 = \frac{1}{2}, \quad k_2 = \frac{1}{2}.$$

Durch Lösen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 1 &= k_3 + k_4 \cdot \frac{1}{d_{\max}} \\ 0 &= k_3 + k_4 \cdot \frac{1}{d_{\min}} \end{aligned}$$

erhält man

$$k_3 = \frac{d_{\max}}{d_{\max} - d_{\min}}, \quad k_4 = -\frac{d_{\min} \cdot d_{\max}}{d_{\max} - d_{\min}}.$$

Die x-Werte werden analog zu den y-Werten skaliert. Insgesamt ergibt sich somit

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{2} + \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{z} \\ y' &= \frac{1}{2} + \frac{y}{2} \cdot \frac{1}{z} \\ z' &= \frac{d_{\max}}{d_{\max} - d_{\min}} - \frac{d_{\min} \cdot d_{\max}}{d_{\max} - d_{\min}} \cdot \frac{1}{z}. \end{aligned}$$

Zwar wird hierdurch die Szene im vorderen z-Bereich nicht-linear gestaucht, zur Bestimmung der Sichtbarkeit reichen die ermittelten z-Werte jedoch aus, da ihre Ordnung erhalten bleibt.

Durch Verknüpfen der beiden letzten Transformationen erhält man in Schritt 3.) als Transformationsmatrix

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{x_{\max} - x_{\min}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d}{y_{\max} - y_{\min}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}(1 - \frac{x_{\min} + x_{\max}}{x_{\max} - x_{\min}}) & \frac{1}{2}(1 - \frac{y_{\min} + y_{\max}}{y_{\max} - y_{\min}}) & \frac{d_{\max}}{d_{\max} - d_{\min}} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{-d_{\max} \cdot d_{\min}}{d_{\max} - d_{\min}} & 0 \end{bmatrix}$$

die den sichtbaren Teil der Szene in den Einheitswürfel transformiert.

Um wieder ein rechtshändiges Koordinatensystem zu erhalten, wird zunächst das Koordinatensystem so transformiert, daß die Back Plane in die xy-Ebene verschoben wird. Abschließend wird wieder an der xy-Ebene gespiegelt.

Für das Clippen von Kanten am Einheitswürfel bietet sich die dreidimensionale Erweiterung des Algorithmus von Cohen & Sutherland an: Der Bereichs-Code benötigt 6 Bits.

15.2.5 Device Mapping

Die abschließende Projektion der Szene in Schritt 4.) aus dem NPC auf den Bildschirm wird als *Device Mapping* bezeichnet. Der Einheitswürfel enthält dank der vorangegangenen Transformationen die gesamte darzustellende Szeneninformation. Die Abbildung muß lediglich die x- und y-Koordinaten aus dem NPC so in die Bildschirmkoordinaten DC (*Device Coordinate System*) transformieren, daß eine anschließende Rundung die ganzzahligen Koordinaten der Pixel ergibt.

DC ist auf den meisten Bildschirmen ein linkshändiges Koordinatensystem. (Die y-Achse zeigt nach unten, oben links ist der Ursprung $(0, 0)$.) Die Anzahl der Pixel im Ausgabefenster ist flexibel und betrage horizontal $xsize$ und vertikal $ysize$. In x-Richtung muß dann das Intervall $[0, 1]$ auf die diskreten Werte $\{0, ..., xsize - 1\}$ und in y-Richtung $[0, 1]$ umgekehrt auf $\{ysize - 1, ..., 0\}$ abgebildet werden. Die z-Koordinaten dienen später zur Bestimmung und Unterdrückung verdeckter Flächen, die sich durch die Staffelung der Objekte in der Tiefe des Bildraumes ergeben (siehe z-Buffer-Algorithmus).

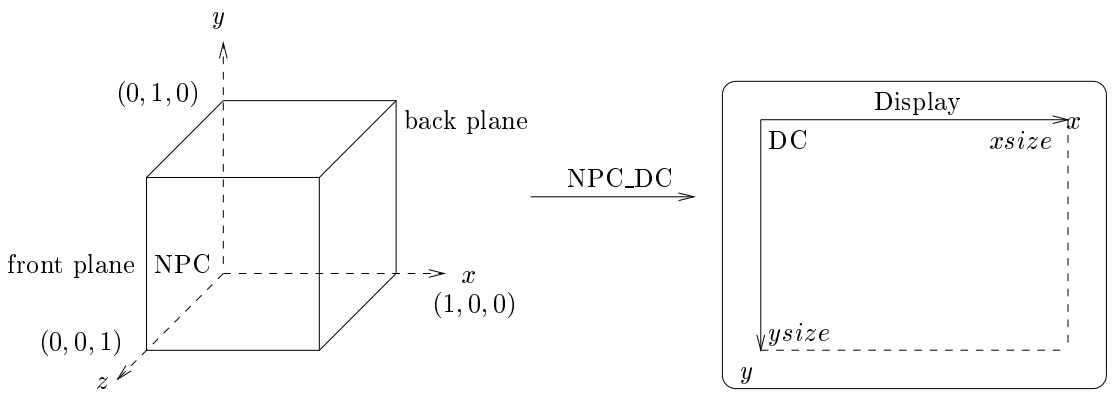


Abbildung 15.9: Device Mapping

Die Transformationsmatrix entspricht einer Skalierung um den Vektor $(xsize, -ysize, 1)$ konkateniert mit einer Translation des Ursprungs in die linke untere Ecke des Bildschirms $(0, ysize, 0)$.

$$T_{\text{NPC_DC}} = \begin{bmatrix} xsize & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -ysize & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & ysize & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Für die Projektion werden einfach die x- und y-Werte übernommen; die z-Werte sind erforderlich zur Regelung der Sichtbarkeit beim Tiefenpufferalgorithmus.

15.2.6 Zusammenfassung

Abbildung 15.10 zeigt die schematische Transformationspipeline im Überblick. Diese wird bei der Ausführung des Programms von Polygonen durchlaufen, aus denen sich die Elementarobjekte zusammensetzen.

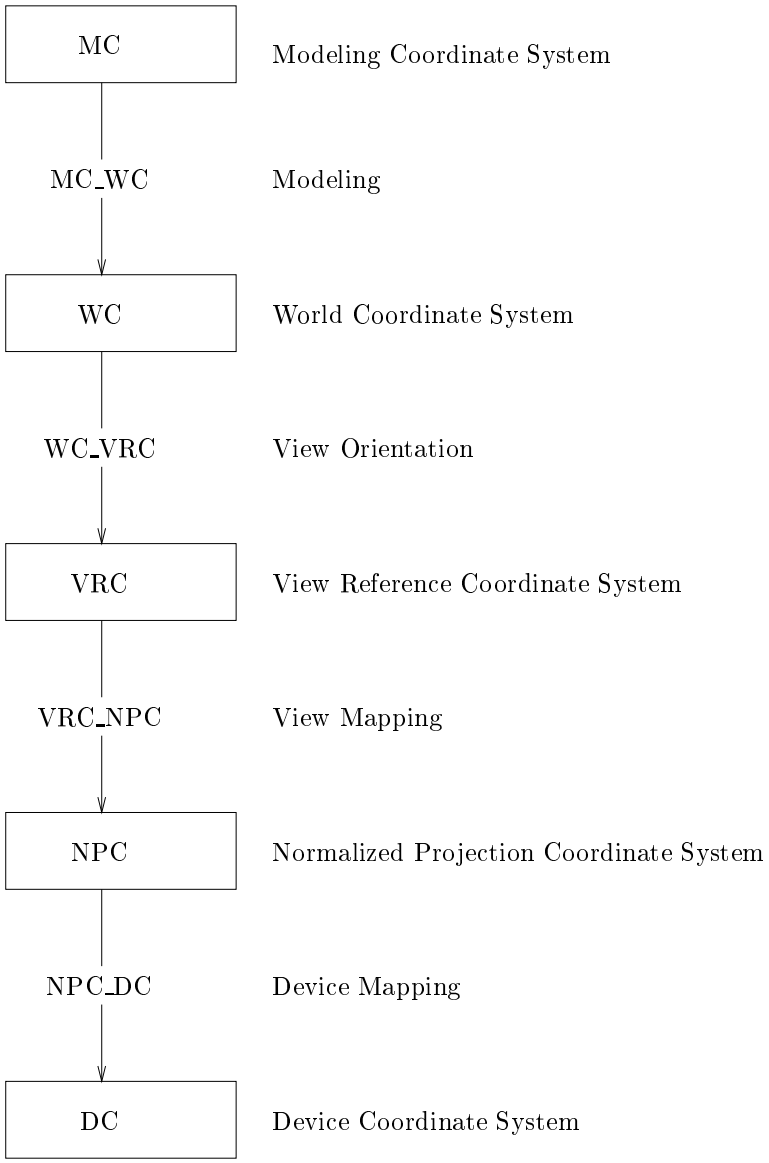


Abbildung 15.10: Transformationspipeline

Kapitel 16

3D-Objekte

Im Flächenmodell werden Objekte durch ihre Begrenzungsflächen beschrieben und diese wiederum durch ihre Kanten mit den Eckpunkten im Modellkoordinatensystem. Außerdem wird noch ein Normalenvektor im MC benötigt. Auf diese Weise kann ein Programm Polyeder exakt darstellen und gekrümmte Oberflächen durch konvexe Polygone beliebig gut approximieren.

16.1 Polyeder

Abbildung 16.1 zeigt eine vom Projektionsalgorithmus erzeugte Szene mit Würfel und Tetraeder in der Drahtmodell-Darstellung mit gestrichelten Rückkanten.

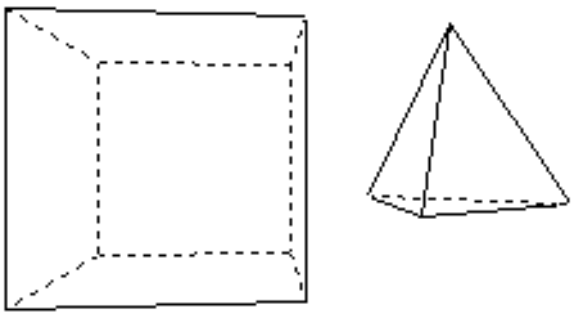


Abbildung 16.1: Vom Projektionsalgorithmus berechnete Drahtgitter-Darstellung

Am Beispiel des Würfels soll die Repräsentation von Polyedern im Halbkantenmodell erläutert werden.

16.1.1 Würfel

Der *Würfel* mit der Kantenlänge 1 hat im MC die homogenen Eckpunktkoordinaten

$$\begin{array}{llll} (+0.5, & +0.5, & +0.5, & 1), \\ (+0.5, & -0.5, & +0.5, & 1), \\ (-0.5, & +0.5, & +0.5, & 1), \\ (-0.5, & -0.5, & +0.5, & 1), \end{array} \qquad \begin{array}{llll} (+0.5, & +0.5, & -0.5, & 1), \\ (+0.5, & -0.5, & -0.5, & 1), \\ (-0.5, & +0.5, & -0.5, & 1), \\ (-0.5, & -0.5, & -0.5, & 1). \end{array}$$

Da jede der sechs Flächen des Würfels eben ist, gibt es pro Fläche nur einen Normalenvektor, der durch das Kreuzprodukt zweier benachbarter Kanten berechnet werden kann. Die Reihenfolge der Punkte ist dabei signifikant, da jeweils aufeinanderfolgende Punkte eine Kante bilden. Ein *Quader* entsteht aus dem Würfel durch ungleichmäßige Skalierung beim Modeling.

Auch alle anderen Polyeder werden im MC in der Halbkantendarstellung definiert, ein Tetraeder beispielsweise mit Kantenlänge 1 und Schwerpunkt im Ursprung.

16.2 Gekrümmte Flächen

Eine gekrümmte Oberfläche, die analytisch beschrieben werden kann, läßt sich beliebig gut durch Polygone approximieren. Die Gruppe der Objekte mit analytisch gekrümmter Oberfläche besteht aus zwei Typen: Während z.B. die Kugel nur aus einer solchen Fläche besteht, sind Zylinder und Kegel aus mehreren Flächen zusammengesetzt.

Die Repräsentation der gekrümmten Körper erfolgt im Flächenmodell mit einer Flächen- und Eckpunkteliste sowie einer Normalenliste, die pro Eckpunkt die zugehörige Normale enthält.

16.2.1 Zylinder

Der zur z-Achse symmetrische *Zylinder* mit Höhe 2 und Radius 1 besteht aus einer Mantelfläche und zwei Deckflächen. Die beiden Kreisscheiben bei $z = 1$ und $z = -1$ lassen sich durch regelmäßige n-Ecke darstellen. Die Mantelfläche wird durch n Rechtecke approximiert. Dabei wachsen mit n sowohl die Genauigkeit der Approximation als auch der Rechenaufwand. Sei $\alpha = (2\pi)/n$, so lauten für ein solches Rechteck die vier Eckpunkte und die zugehörigen Normalenvektoren:

Eckpunkt	Normalenvektor
$(\cos(\phi), \sin(\phi), +1, 1)$	$(\cos(\phi), \sin(\phi), 0, 0)$
$(\cos(\phi+\alpha), \sin(\phi+\alpha), +1, 1)$	$(\cos(\phi+\alpha), \sin(\phi+\alpha), 0, 0)$
$(\cos(\phi+\alpha), \sin(\phi+\alpha), -1, 1)$	$(\cos(\phi+\alpha), \sin(\phi+\alpha), 0, 0)$
$(\cos(\phi), \sin(\phi), -1, 1)$	$(\cos(\phi), \sin(\phi), 0, 0)$

mit $\phi = k \cdot \alpha$, $k \in \{0, ..., n-1\}$.

Als Normalenvektor in einem Eckpunkt dieser Fläche wird also der tatsächliche Normalenvektor der Mantelfläche genommen. Dadurch erhalten aneinandergrenzende Flächen in ihren gemeinsamen Eckpunkten auch denselben Normalenvektor. Auf diese Weise erzeugt das Programm bei der späteren Beleuchtung den Eindruck eines stetigen Übergangs zwischen den Flächen. Der Betrachter nimmt statt einer n-eckigen Säule den Zylinder wahr.

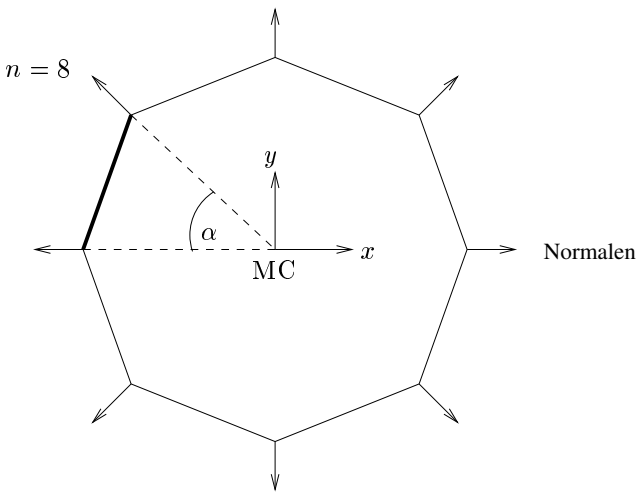


Abbildung 16.2: Zylinder im Grundriß mit Normalenvektoren der Mantelfläche

16.2.2 Kugel

Die Oberfläche einer *Kugel* mit Radius 1 kann beschrieben werden durch

$$(\sin(\theta)\cos(\phi), \sin(\theta)\sin(\phi), \cos(\theta)), 0 \leq \phi < 2\pi, 0 \leq \theta < \pi \ .$$

Zur Approximation durch Flächen wird der Vollwinkel in n Teile zerlegt:

$$\alpha = (2\pi)/n, \quad n \in \mathbb{N} \text{ gerade} \ .$$

Dadurch entstehen auf der Kugel $n/2$ gleichgroße Längenkreise und $(n/2-1)$ verschieden große Breitenkreise. Diese schneiden n Dreiecke an jedem Pol und $n(n/2-2)$ Vierecke aus der Kugeloberfläche. Die Ortsvektoren der Eckpunkte eines Dreiecks am Nordpol ($\theta = 0$) lauten

$$(0, 0, +1, 1),$$

$$(\sin(\alpha)\cos(\phi), \sin(\alpha)\sin(\phi), \cos(\alpha), 1),$$

$$(\sin(\alpha)\cos(\phi+\alpha), \sin(\alpha)\sin(\phi+\alpha), \cos(\alpha), 1),$$

mit $\phi = k \cdot \alpha$, $k \in \{0, ..., n-1\}$.

Die Eckpunkte eines der Vierecke haben die Ortsvektoren

$$(\sin(\theta)\cos(\phi), \sin(\theta)\sin(\phi), \cos(\theta), 1),$$

$$(\sin(\theta)\cos(\phi+\alpha), \sin(\theta)\sin(\phi+\alpha), \cos(\theta), 1),$$

$$(\sin(\theta+\alpha)\cos(\phi+\alpha), \sin(\theta+\alpha)\sin(\phi+\alpha), \cos(\theta+\alpha), 1),$$

$$(\sin(\theta+\alpha)\cos(\phi), \sin(\theta+\alpha)\sin(\phi), \cos(\theta+\alpha), 1),$$

mit $\phi = k \cdot \alpha, k \in \mathbb{N}, k < n$ und $\theta = l \cdot \alpha, l \in \mathbb{N}, 0 < l < (n/2-1)$.

Als Normalenvektor wird in jedem Eckpunkt der Ortsvektor als Richtungsvektor ($w = 0$) eingetragen, denn der Radiusvektor steht senkrecht auf der Kugeloberfläche. Einen *Ellipsoid* erzeugt der Rendering-Algorithmus aus der Kugel durch ungleichmäßige Skalierung beim Modeling.

Abbildung 16.3 zeigt eine vom Projektionsalgorithmus erzeugte Szene mit Kugel und Zylinder in der Drahtmodell-Darstellung ohne Rückkanten ($n = 32$).

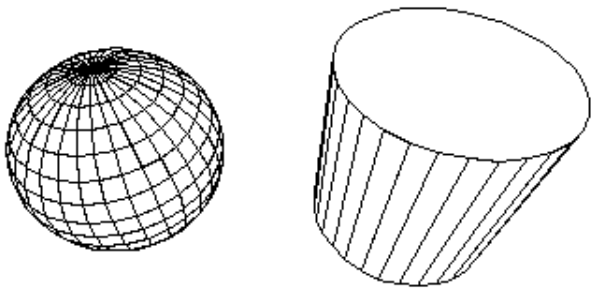


Abbildung 16.3: Kugel und Zylinder als Drahtgitter

Kapitel 17

Entfernen verdeckter Kanten und Flächen

Beim Entfernen verdeckter Kanten und Flächen werden unterschieden:

- Objektraum-Algorithmen (arbeiten auf Weltkoordinaten, vergleichen Objekte)
- Bildraum-Algorithmen (arbeiten auf Device-Koordinaten, vergleichen Pixel)

Das zunächst vorgestellte Back-Face Removal entfernt nur die Rückflächen einzelner Objekte, indem es im Objektraum (WC oder NPC) die Beziehung zwischen Betrachter und Objektfläche untersucht. Ob ein Objekt ein anderes verdeckt, kann dadurch nicht festgestellt werden.

17.1 Back-Face Removal/Culling

Ein Körper besteht aus Flächen, die dem Betrachter zugewandt sind (sogenannte Vorderflächen oder Front Faces) und solchen, die vom Betrachter abgewandt sind (sogenannte Rückflächen oder Back Faces). Die Rückflächen sind nicht sichtbar, da sie stets von Vorderflächen verdeckt sind. Die Unterdrückung der Rückflächen (*Back-Face Removal* oder *Back-Face Culling*) ist daher ein erster Schritt in Richtung einer natürlichen Darstellung des Kantenmodells. Für einen konvexen Körper bestimmt das Back-Face Culling exakt den sichtbaren Teil. Ist er dagegen nicht konvex, so werden zwar mehr Kanten angezeigt, als wirklich sichtbar sind, die Darstellung ist jedoch schon sehr realistisch. Ein weiterer Aspekt ist, daß bei einer komplexen Szene circa die Hälfte aller Flächen Rückflächen sind. Durch ihren Ausschluß halbieren sich in etwa die weiteren Berechnungen für Lighting und Shading.

Das Programm benutzt eine sehr effiziente Methode unter Verwendung der Normalenvektoren, um Vorder- und Rückflächen zu unterscheiden. Für die Flächen eines Objekts sind die Normalen so definiert, daß sie nach außen zeigen. Liegt der Betrachterstandpunkt auf der Außenseite einer Fläche, so handelt es sich um eine Vorder-, sonst um eine Rückfläche.

Wenn $\mathbf{n}$ der Normalenvektor der Fläche und $\mathbf{a}$ ein Eckpunkt ist, dann kann hieraus die Gleichung der Ebene, in der die Fläche liegt, in der *Hesseschen Normalform* bestimmt werden:

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{n}^{\mathrm{T}} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}^{\mathrm{T}} = e.$$

Beim Einsetzen verschiedener Punkte **p** ergeben sich unterschiedliche Werte für e. Gilt $e = 0$, so liegt **p** in der Ebene, bei $e > 0$ befindet sich **p** außen, d.h., die Fläche ist von **p** aus sichtbar, und bei $e < 0$ liegt **p** innen, d.h., die Fläche ist von **p** aus unsichtbar.

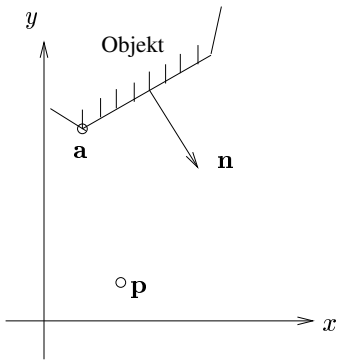


Abbildung 17.1: Back-Face Removal mit Hessescher Normalform

Um die Rückflächen zu erkennen, ist für alle Flächen die obige Ebenengleichung zu berechnen, in die der Betrachterstandpunkt eingesetzt wird. Ergibt sich $e \geq 0$, so handelt es sich um eine Vorderfläche, sonst um eine Rückfläche. Dabei ist zu beachten, daß ggf. für jeden Eckpunkt eine eigene Normale definiert ist. Dies ist zum Approximieren von gekrümmten Flächen notwendig. Bei einer Rückfläche sind definitionsgemäß alle Normalenvektoren abgewandt. Flächen, bei denen einige Normalen zum Betrachter und andere von ihm weg zeigen, werden teilweise dargestellt. Es ist Aufgabe des später vorzustellenden Shaders, die sichtbaren Pixel zu bestimmen. Bei der Liniendarstellung wird eine Kante gezeichnet, wenn mindestens ein Eckpunkt sichtbar ist.

Eine algorithmische Vereinfachung des Tests auf Sichtbarkeit ergibt sich durch die Transformation der Ebenengleichung ins NPC. Hierbei wird ausgenutzt, daß der Betrachterstandpunkt im NPC per Definition die homogenen Koordinaten $(0, 0, 1, 0)$ besitzt. (Er liegt im Unendlichen auf der positiven z-Achse.) Daraus folgt, daß das Skalarprodukt zwischen Ebene und Betrachterstandpunkt im NPC identisch mit der z-Komponente des homogenen Normalenvektors der Fläche ist.

Zur Klassifizierung des Flächentyps wird daher im Programm zunächst nur die z-Komponente der homogenen Normalenvektoren ins NPC transformiert. Durch diese sehr effiziente Methode, Rückflächen zu eliminieren, halbiert sich in etwa die Berechnung zur Darstellung eines Objekts.

17.2 Hidden-Surface Removal

Bei der Darstellung von 3-D-Szenen ist das Problem zu lösen, daß der Betrachter nur die Objekte sehen sollte, die im Vordergrund liegen; alle anderen sind zumindest teilweise verdeckt. Das Entfernen der nicht sichtbaren Flächen wird als *Hidden-Surface Removal* bezeichnet.

17.2.1 z-Buffer-Algorithmus

Der hier vorgestellte *z-Buffer-Algorithmus* löst das Problem nach dem folgenden Prinzip: Für alle Pixel des Bildschirms wird die z-Komponente als Wert für die Tiefe im Raum gespeichert. Die benötigte Datenstruktur, der sogenannte z-Buffer, ist im Programm ein 2-dimensionales Array, das für jedes Pixel den z-Wert des in diesem Punkt dem Betrachter am nächsten liegenden Objekts enthält. In einem gleichgroßen Feld, dem Frame Buffer, werden die Farbwerte der Pixel gespeichert. Die Menge der Farbwerte stellt den Bildschirmspeicher dar.

Der z-Wert wird mit Null und der Farbwert mit der Hintergrundfarbe der Szene initialisiert.

Laut Definition der Transformationspipeline treten nach dem Clipping im NPC nur noch z-Werte zwischen Null und Eins auf. Die Initialisierung mit Null entspricht dem größtmöglichen Abstand vom Betrachter (back plane).

Durch die Rasterung der Flächen erhalten die Pixel auch einen interpolierten z-Wert, der mit dem z-Buffer-Wert an dieser Stelle verglichen wird. Ist der z-Wert des Pixels größer, so ist das Pixel (vorläufig) sichtbar. Sein z-Wert wird in den z-Buffer und sein Farbwert in den Bildschirmspeicher eingetragen. Ist der z-Wert des Pixels kleiner, so ist der zugehörige Teil der Fläche verdeckt; die Inhalte von z-Buffer und Bildschirmspeicher bleiben erhalten. Nach der Abarbeitung aller Flächen enthält der Bildschirmspeicher die Abbildung der sichtbaren Flächen bzw. Flächenteile und der z-Buffer die zugehörige Tiefeninformation.

Der z-Buffer-Algorithmus entscheidet pixelweise über die Verdeckungseigenschaften und ist daher sehr allgemeingültig. Die darzustellenden ebenen Flächen brauchen nicht vorsortiert zu werden und dürfen sich gegenseitig durchdringen. Da er am Ende der Transformationspipeline im DC arbeitet, wird er als Bildraumalgorithmus klassifiziert.

Der z-Buffer-Algorithmus wird vom Programm in der inneren Schleife des Scanline-Algorithmus aufgerufen und läßt sich wie folgt skizzieren:

```
Für jede Fläche F tue:
        Für jedes Pixel (x, y) auf dieser Fläche tue:
        berechne Farbe c und Tiefe z
        falls z > tiefe[x, y]:
        dann wird c an der Stelle x,y im Frame Buffer eingetragen
        und tiefe[x, y] auf z gesetzt.
```

Ist die Fläche durch $Ax + By + Cz + D = 0$ gegeben, so ist die Tiefe im Punkt (x, y):

$$z = -\frac{Ax + By + D}{C}$$

Für auf einer Scanline benachbarte Punkte (x_i, y_j) und (x_{i+1}, y_j) ergibt sich

$$z_{i+1} = z_i - \frac{A}{C}$$

Für die Punkte (x_i, y_j) und (x_i, y_{j+1}) zweier benachbarter Scanlines ergibt sich

$$z_{j+1} = z_j - \frac{B}{C}$$

Das größte Problem bei der Implementierung des z-Buffers ist sein Speicherplatzbedarf. Eine ausreichende Auflösung der Tiefeninformation ergibt sich erst mit einem 32-Bit z-Wert, d.h. $maxint = (2^{31} - 1)$. Für die RGB-Tripel werden drei Byte benötigt, die in einem 32-Bit Integer kodiert werden. Pro Pixel belegen der z-Buffer und der Bildschirmspeicher also acht Byte. Bei einer Bildschirmauflösung von 1024×768 Pixeln ergeben sich folglich 6 MB.

17.3 Beispiel-Applet zur Wire-Frame-Projektion

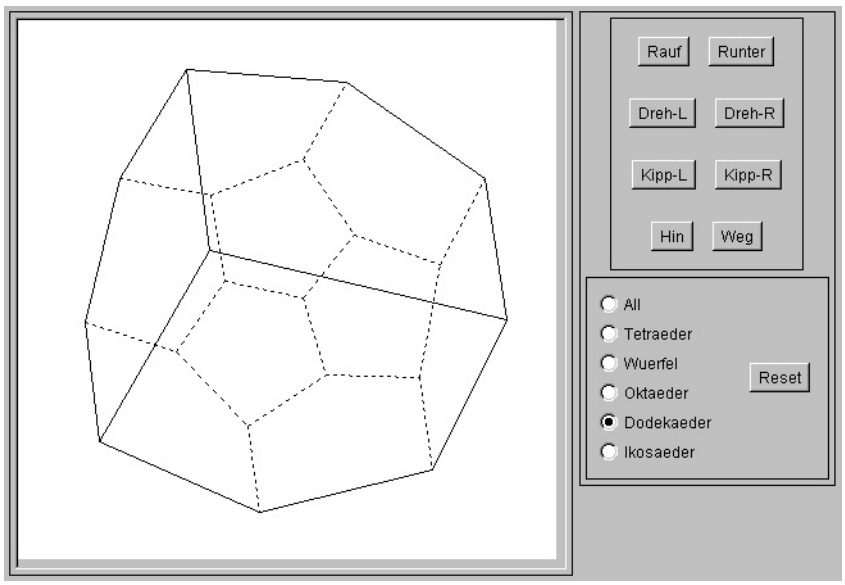


Abbildung 17.2: Screenshot vom 3D-wire-Applet

Kapitel 18

Rasterung von Flächen

Die reellwertigen Koordinaten der Objekte im DC am Ende der Transformationspipeline müssen in ganzzahlige Pixelkoordinaten gerundet werden. Die Rasterung von Flächen kann mit Hilfe des Scanline-Verfahrens auf die von Linien zurückgeführt werden. In einem zweistufigen Algorithmus wird die Fläche zunächst in eine Menge horizontaler Linien, die sogenannten *Spans*, zerlegt. Die Eckpunkte dieser Spans ergeben sich durch Rasterung der Kanten nach dem vorgestellten Verfahren. In der zweiten Stufe wird dann jeder der Spans gerastert.

Das *Scanline*-Verfahren wird zur Vereinfachung und Beschleunigung des Rendering-Programms nur auf Dreiecke angewandt, denn Dreiecke sind die einfachsten Polygone. Gegenüber allgemeinen Polygonen bieten sie den Vorteil, daß sie planar und konvex sind. Für das Scanline-Verfahren eignen sie sich ausgezeichnet, da für jede Bildschirmzeile (Scanline) maximal zwei Schnittpunkte mit den Dreieckskanten auftreten.

Ein konvexes Polygon läßt sich gemäß der Abbildung triangulisieren, indem von einem beliebigen Eckpunkt aus zu allen nicht benachbarten Eckpunkten Diagonalen gezogen werden.

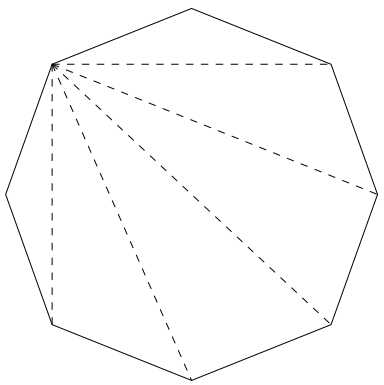


Abbildung 18.1: Triangulisierung eines konvexen Polygons

Unter Rasterung wird hier nicht nur das Füllen der Fläche in der Objektfarbe verstanden. Neben den Pixelkoordinaten müssen auch die z-Werte der Polygonpunkte interpoliert werden, um mit Hilfe dieser Tiefeninformation verdeckte Flächen zu unterdrücken (siehe z-Buffer-Algorithmus).

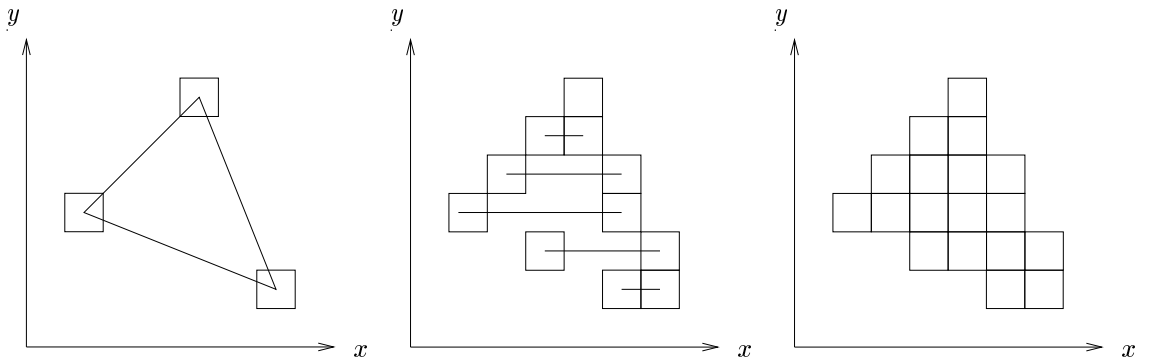


Abbildung 18.2: Scanline-Verfahren zur Rasterung von Dreiecken

Außerdem sind je nach Schattierungs-Verfahren auch die Farbwerte bzw. die Normalenvektoren, die in den Eckpunkten gegeben sind, über die Fläche zu interpolieren. Verschiedene Farbwerte auf den Objektflächen ergeben sich durch die individuelle Beleuchtung der Punkte. Die Interpolation der Normalen simuliert dabei einen gekrümmten Flächenverlauf. Grundlegend für die Schattierungs-Verfahren ist die Beleuchtung einer Szene mit Hilfe von unterschiedlichen Lichtmodellen.

18.1 Beleuchtung

Um künstlich hergestellte Bilder wirklich realistisch aussehen zu lassen, muß eine Beleuchtung der darzustellenden Objekte durchgeführt werden. Dieser Prozeß wird in der Computergrafik *Lighting* genannt. Die dabei verwendeten Modelle bilden die Lichtverhältnisse sowie die Oberflächenbeschaffenheiten der Objekte nicht völlig naturgetreu nach, sondern sind nur Näherungen, deren Qualität vom Rechenaufwand abhängt. Die erzeugten Bilder bzw. die eingesetzten Modelle stellen somit einen Kompromiß zwischen Darstellungsgenauigkeit und verfügbarer Rechenzeit dar.

Die Intensität des Lichts, das von einer Oberfläche empfangen wird, hängt von den Lichtquellen in der Umgebung sowie von der Struktur und der Materialart der beleuchteten Fläche ab. Ein Teil des empfangenen Lichts wird vom Körper absorbiert und der Rest reflektiert. Wird das gesamte Licht absorbiert, ist der Körper nicht direkt sichtbar, sondern er hebt sich schwarz vom Hintergrund ab. Erst durch die Reflexion des Lichts wird das Objekt selbst sichtbar. Seine Farbe hängt vom Anteil der absorbierten und reflektierten Farben ab.

In die Berechnung des Farbwertes eines Objektpunktes fließen ein:

- der Augenpunkt des Betrachters,
- die Zahl und Art der Lichtquellen,
- die Materialeigenschaften des Objekts,
- der Normalenvektor des Objekts in diesem Punkt.

18.1.1 Lichtquellen

Der Grafikstandard PHIGS PLUS definiert vier Modelle von Lichtquellen:

- Umgebungslicht (*ambient light*),
- gerichtetes Licht (*directed light* oder *infinite light*),
- Punktlicht (*point light* oder *positional light*),
- Strahler (*spot light*).

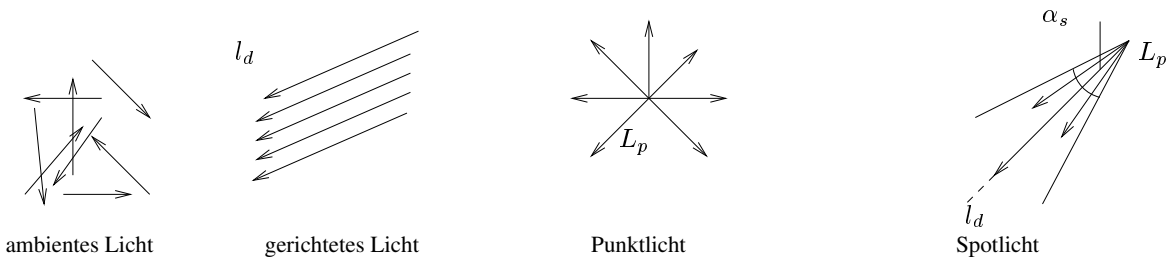


Abbildung 18.3: Vier Modelle von Lichtquellen (schematisch)

Das einfachste Lichtmodell ist das *Umgebungslicht*, das durch eine konstante Intensität I_a definiert ist. Diese ungerichtete Hintergrundbeleuchtung simuliert das Licht, das durch Reflexion an den einzelnen Gegenständen überall in einer Szene vorhanden ist.

Gerichtetes Licht ist definiert durch eine Intensität I und eine Lichtrichtung $\mathbf{l}_d$. Es ist gekennzeichnet durch Lichtstrahlen, die parallel aus dem Unendlichen in eine bestimmte Richtung strahlen, vergleichbar mit dem Sonnenlicht.

Ein *Punktlicht* mit der Intensität I_0 hat eine Position $\mathbf{L}_p$ im Raum (WC), von der aus es in alle Richtungen gleichförmig abstrahlt wie eine Glühbirne. Die Intensität des Lichts nimmt mit zunehmender Entfernung r ab nach der Formel

$$I(r) = \frac{I_0}{C_1 + C_2 \cdot r}.$$

Dabei bezeichnet r den Abstand von der Punktlichtquelle. C_1 und C_2 heißen Abschwächungskoeffizienten (*attenuation coefficients*, $C_1 \geq 1$, $C_2 \geq 0$).

Das aufwendigste Lichtmodell ist der *Strahler* (*Spot*). Dieser hat wie das Punktlicht eine Intensität I_0, eine Position $\mathbf{L}_p$ sowie die Abschwächungskoeffizienten C_1 und C_2. Dazu kommt eine bevorzugte Lichtrichtung $\mathbf{l}_d$, um die herum das Licht nur im Winkel α_s (*spread angle*) abgestrahlt wird. Außerhalb dieses Lichtkegels ist die Intensität Null. Der *concentration exponent* L_e definiert, wie stark die ausgesandte Lichtenergie mit zunehmendem Winkel zwischen $\mathbf{l}_d$ und der Strahlrichtung $\mathbf{r}$ abnimmt. Die Abnahme ist proportional zu

$$\cos(\mathbf{r}, \mathbf{l}_d)^{L_e}$$

innerhalb des durch α_s definierten Lichtkegels. Je größer L_e, um so stärker ist die Intensität im Zentrum des Lichtkegels gebündelt.

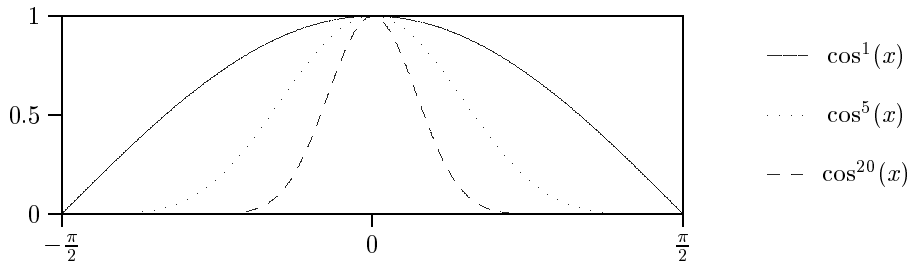


Abbildung 18.4: Lichtintensitätsverteilung beim Strahler (schematisch)

18.1.2 Reflexionseigenschaften

Die Lichtreflexion an Objekten im fast realistischen *Phong-Modell* besteht aus drei Termen:

- ambientes Licht,
- diffus reflektiertes gerichtetes Licht,
- spekular reflektiertes gerichtetes Licht.

Diese Terme werden berechnet und zu einer Farbe zusammengefaßt, um den resultierenden Farbeindruck zu erhalten:

$$\overline{C} = \sum_{i=1}^{n} (\overline{C_{a_i}} + \overline{C_{d_i}} + \overline{C_{s_i}}) \ .$$

Dabei ist $\overline{C}$ das gesamte von einem Punkt der Oberfläche reflektierte farbige Licht, n ist die Anzahl der Lichtquellen, und $\overline{C_{a_i}}$, $\overline{C_{d_i}}$, $\overline{C_{s_i}}$ sind die ambienten, diffusen und spekularen Anteile des reflektieren Lichts für die Lichtquelle i. Die Herleitungen müssen im RGB-Modell für jede der drei Grundfarben getrennt betrachtet werden.

18.1.3 Oberflächeneigenschaften

Das Reflexionsverhalten (und damit das Erscheinungsbild) eines Körpers wird durch folgende Oberflächeneigenschaften bestimmt:

k_a ambienter Reflexionskoeffizient,

k_d diffuser Reflexionskoeffizient,

k_s spekularer Reflexionskoeffizient,

$\overline{O_d}$ diffuse Objektfarbe,

$\overline{O_s}$ spekulare Objektfarbe,

O_e spekularer Exponent.

Die *ambiente Reflexion* gibt das Verhalten eines Körpers bei ambienter Beleuchtung wieder. Der ambiente Reflexionskoeffizient k_a gibt an, wieviel des einfallenden ambienten Lichts der Intensität I_a vom Objekt in seiner diffusen Objektfarbe $\overline{O_d}$ reflektiert wird:

$$\overline{C_a} = k_a \cdot I_a \cdot \overline{O_d} \ .$$

Die *diffuse Reflexion* basiert auf dem Phänomen der Streuung. Eintreffendes Licht dringt in den Körper ein und wird von seinen tieferen Schichten gleichmäßig in alle Richtungen gestreut. Das reflektierte Licht hat die diffuse Objektfarbe $\overline{O_d}$. Die Intensität I_e des einfallenden Lichts in einem Punkt ist proportional zum Cosinus des Winkels zwischen der Flächennormale $\mathbf{N}$ in dem Punkt und der Richtung zur Lichtquelle $\mathbf{L}$ (*Cosinusgesetz von Lambert*):

$$I_e \propto \cos(\mathbf{L}, \mathbf{N}) \ .$$

Das ambiente Licht wird hierbei nicht berücksichtigt, weshalb auch von gerichteter Reflexion gesprochen wird. Für einen diffusen Reflektor gilt

$$\overline{C_d} = k_d \cdot I_e \cdot \overline{O_d},$$

wobei k_d angibt, wie stark die diffuse Reflexion ist.

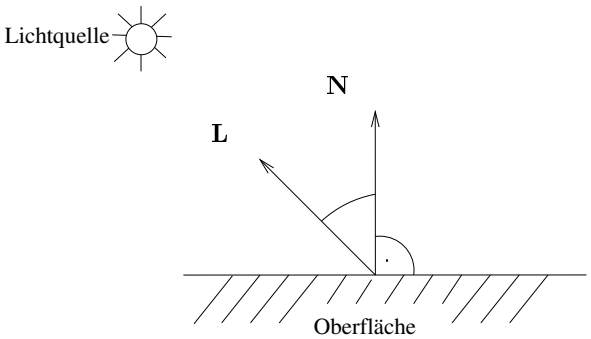


Abbildung 18.5: Cosinusgesetz von Lambert (für diffuse Reflexion)

Die *spekulare Reflexion* beruht auf dem Phänomen der Spiegelung. Eintreffendes Licht wird an der Oberfläche des Objekts gespiegelt (Einfallswinkel = Ausfallswinkel). Das reflektierte Licht hat die spekulare Objektfarbe $\overline{O_s}$, da keine tiefere Wechselwirkung mit dem Objekt stattfindet. Wird das Objekt aus der Reflexionsrichtung betrachtet, so hat es an dieser Stelle einen Glanzpunkt (*Highlight*) in der Farbe $\overline{O_s}$.

Natürliche Materialien sind zumeist keine perfekten Spiegel und strahlen deshalb nicht nur genau in die Reflexionsrichtung, sondern auch mit abnehmender Intensität in andere Richtungen. Von Phong stammt das Modell, daß die abgestrahlte Lichtmenge exponentiell mit dem Cosinus zwischen Reflexionsrichtung $\mathbf{R}$ und Betrachterrichtung $\mathbf{A}$ abnimmt. Der spekulare Exponent O_e bestimmt dabei den Öffnungswinkel des Streukegels um $\mathbf{R}$, unter dem viel Licht reflektiert wird. Für $O_e \leq 5$ ergeben sich große, für $O_e \gg 10$ kleine Streukegel.

Für einen spekularen Reflektor gilt:

$$\overline{C_s} = k_s \cdot I_e \cdot \overline{O_s} \cdot \cos(\mathbf{R}, \mathbf{A})^{O_e} \ .$$

Dabei ist I_e die Intensität des einfallenden nicht-ambienten Lichts. k_s gibt an, wieviel von I_e gespiegelt wird.

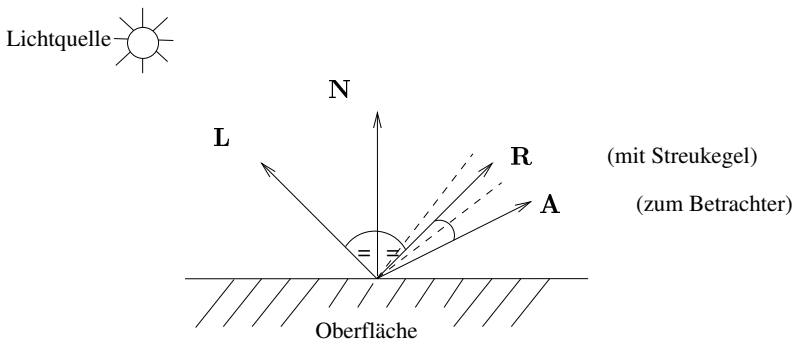


Abbildung 18.6: Spekulare Reflexion nach Phong

18.1.4 Materialeigenschaften

Um im Rendering-Programm Materialeigenschaften nachzuahmen, müssen vom Benutzer insbesondere k_a, k_d und k_s sinnvoll eingestellt werden. Damit ein Objekt nicht mehr Licht aussendet als es empfängt, sollte grundsätzlich $0 \leq k_a, k_d, k_s \leq 1$ gelten, für die Reflexion von gerichtetem Licht zusätzlich $k_d + k_s \leq 1$. Wird k_a im Verhältnis zu k_d und k_s sehr groß gewählt, so ist der beleuchtete Gegenstand sehr kontrastarm. Für matte Gegenstände sollte $k_d \gg k_s$, für spiegelnde $k_s > k_d$ gelten. Je größer O_e ist, um so ähnlicher wird das Reflexionsverhalten dem eines idealen Spiegels.

18.2 Schattierungsalgorithmen

Nach den Grundlagen über die Beleuchtung und die Rasterung von Flächen werden in diesem Abschnitt drei Schattierungsalgorithmen vorgestellt, die mit unterschiedlicher Genauigkeit reale Beleuchtungsverhältnisse nachbilden. Hierbei handelt es sich um inkrementelle Verfahren, die die vorgestellten empirischen Beleuchtungsmodelle verwenden. Die Rasterung der Flächen erfolgt nach der Triangulisierung; deshalb heißen diese Verfahren auch *Dreieck-Shading*-Algorithmen.

18.2.1 Flat-Shading

Das einfachste Schattierungsmodell für ebenflächig begrenzte Objekte ist das *Flat-Shading*. Es verwendet konstante Farbwerte für die einzelnen Dreiecke der Oberfläche. Dazu werden die drei Eckpunkte im WC (wegen der erforderlichen Entfernungen) mit dem vorgestellten Phong-Modell beleuchtet. Nach der Abbildung in die Pixelkoordinaten (DC) werden mit dem Rasteralgorithmus alle Pixel der Dreiecksfläche in der Farbe des Mittelwertes der drei Eckfarbwerte gesetzt:

$$\overline{C_i} = \frac{\overline{C_A} + \overline{C_B} + \overline{C_C}}{3} \; \forall P_i \in \Delta(P_A, P_B, P_C) \; .$$

Dabei bezeichnet $\overline{C_i}$ den RGB-Farbwert für Pixel P_i (siehe Abbildung 18.7).

Beim Flat-Shading wird die Oberfläche des Objekts grob schattiert, die Helligkeitsübergänge sind nicht fließend. Die Qualität der erzeugten Bilder hängt vor allem von der Größe der Dreiecke ab. Das Hauptproblem dieses Verfahrens hängt mit der Eigenschaft des menschlichen Auges zusammen, sprunghafte Intensitätsunterschiede verstärkt wahrzunehmen. Der Randbereich einer helleren Fläche erscheint heller und der Randbereich einer angrenzenden dunkleren Fläche dunkler als der Rest des jeweiligen Polygons. Dieser Effekt wird *Mach-Band-Effekt* genannt.

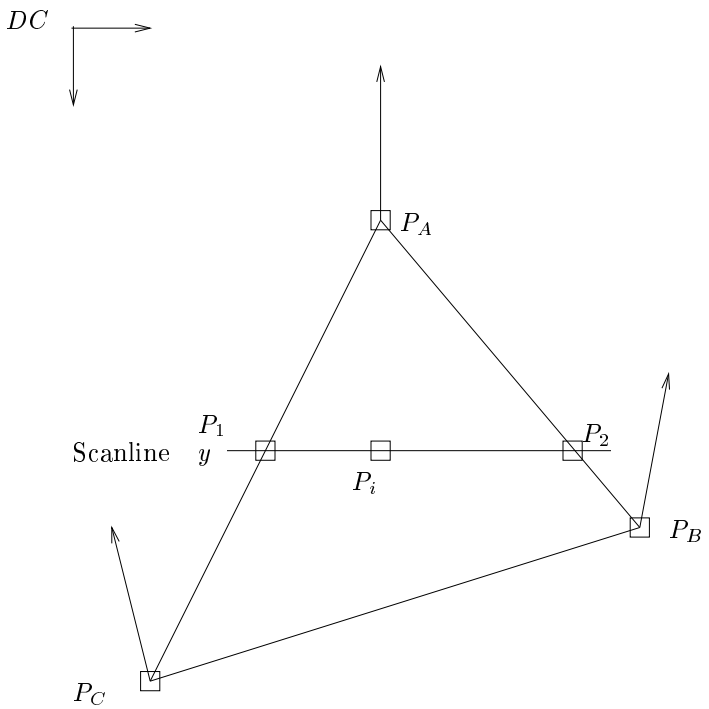


Abbildung 18.7: Dreieck-Shading

18.2.2 Gouraud-Shading

Eine Verbesserung der konstanten Schattierung stellt der Algorithmus von Gouraud dar, der die Farbe eines Pixels im Inneren des Dreiecks durch Interpolation der Eckfarbwerte bestimmt. Dazu werden in diesem scanline-orientierten Algorithmus in den Eckpunkten die Farbwerte ermittelt, die dann zur Interpolation entlang der Polygonkanten verwendet werden.

In der Abbildung berechnen sich die Farbwerte der Pixel $P_1(x_1, y)$ und $P_2(x_2, y)$ wie folgt:

$$\overline{C_1} = \overline{C_A}\frac{y - y_C}{y_A - y_C} + \overline{C_C}\frac{y_A - y}{y_A - y_C}, \quad \overline{C_2} = \overline{C_A}\frac{y - y_B}{y_A - y_B} + \overline{C_B}\frac{y_A - y}{y_A - y_B} \ .$$

Für den Punkt $P_i(x_i, y)$ innerhalb der Fläche ergibt sich die Farbe aus den Randpunkten P_1 und P_2 der Scanline:

$$\overline{C_i} = \overline{C_1}\frac{x_2 - x_i}{x_2 - x_1} + \overline{C_2}\frac{x_i - x_1}{x_2 - x_1} \ .$$

Die Interpolation der Farbwerte ist im entwickelten Programm Teil des Rasteralgorithmus.

Das Gouraud-Shading beseitigt den Mach-Band-Effekt nur zum Teil, da das Auge sogar auf Unstetigkeiten in der zweiten Ableitung der Farbwertkurve in der beschriebenen Art reagiert. Ein weiterer Nachteil liegt in den verformt dargestellten Spiegelungsflächen, die auf die Polygonaufteilung zurückzuführen sind. Dadurch erscheinen die Highlights der spekularen Reflexion auf großen ebenen Flächen evtl. gar nicht oder auf gekrümmten Flächen verzerrt. Eine Möglichkeit, diese unrealistischen Effekte zu begrenzen, besteht in der Verkleinerung der approximierenden Polygone, was einen höheren Rechenaufwand zur Folge hat.

18.2.3 Phong-Shading

Eine zufriedenstellende Lösung der angesprochenen Probleme läßt sich durch den Algorithmus von Phong erzielen. Basierend auf dem besprochenen Beleuchtungsmodell führt dieser Algorithmus die Farbwertberechnung für jedes Pixel der Dreiecksfläche explizit durch. Die dazu benötigten Normalenvektoren müssen zunächst aus den Normalenvektoren in den Eckpunkten berechnet werden. Für die Fläche in der Abbildung ergeben sich die Normalenvektoren in P_1 und P_2 durch lineare Interpolation der in P_A und P_C bzw. P_A und P_B und daraus wiederum die Normalenvektoren entlang der Scanline. Dabei ist zu beachten, daß für die Beleuchtung die Koordinaten und Normalen im WC herangezogen werden.

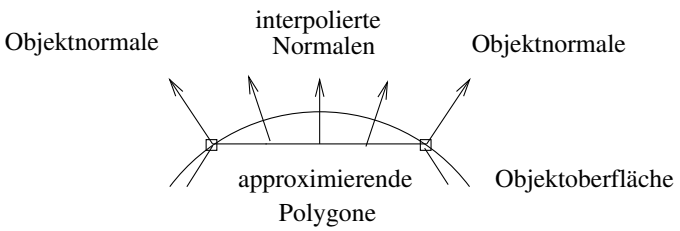


Abbildung 18.8: Interpolation der Normalen beim Phong-Shading

Durch die Interpolation der Normalen ist das Phong-Shading in der Lage, den ursprünglich gekrümmten Verlauf der Oberfläche wiederherzustellen, obwohl das Objekt durch planare Polygone approximiert wird. Dadurch ergibt sich eine fast natürliche spekulare Reflexion mit scharfen Highlights.

Auch mit weniger approximierenden Polygonen ergeben sich bessere Bilder als beim Gouraud-Shading; der Mach-Band-Effekt wird weitgehend unterdrückt. Diese hohe Qualität hat ihren Preis: Statt der Beleuchtung von drei Eckpunkten beim Flat- und Gouraud-Shading müssen beim Phong-Shading alle Pixel des Dreiecks beleuchtet werden, was den Rechenaufwand vervielfacht.

18.3 Schatten

Zur Berechnung von Schatten eignen sich alle *Hidden-Surface*-Algorithmen, da die verdeckten Flächen einer Szene genau den beschatteten Flächen entsprechen, wenn die Position der Lichtquelle und des Betrachters zusammenfallen.

Zunächst wird daher als Phase 1 aus der Sicht der Lichtquelle die Szene in einen Schattentiefenpuffer abgebildet. Phase 2 berechnet dann für den jeweiligen Betrachtungsstandpunkt die Szene mit einem modifizierten Tiefenpuffer-Algorithmus: Ergibt die Überprüfung des z-Wertes mit dem Eintrag `tiefe[x,y]` im Tiefenpuffer, daß dieses Pixel sichtbar ist, so wird der Punkt $P(x, y, z)$ in den Koordinatenraum von Phase 1 transformiert. Ist die z-Koordinate z' des transformierten Punktes P größer oder gleich dem Eintrag $[x', y']$ im Schattentiefenpuffer, dann liegt der Punkt P nicht im Schatten, andernfalls liegt er im Schatten, und seine Intensität muß entsprechend reduziert werden.

18.4 Texture Mapping

Zur realistischen Gestaltung von Oberflächen verwendet man ein zweidimensionales Musterfeld (*texture map*), aus dem für jedes Pixel die zugehörige Farbe ermittelt werden kann. Zugrunde gelegt sind zwei Abbildungen

Musterraum	(u, v)	
$\downarrow$		Abbildung des Musters
Objektraum	(x_0, y_0, z_0)	
$\downarrow$		Projektion
Bildraum	(x, y)	

Die Verknüpfung der zugehörigen inversen Transformationen liefert die zum Einfärben eines Pixels benötigte Information.

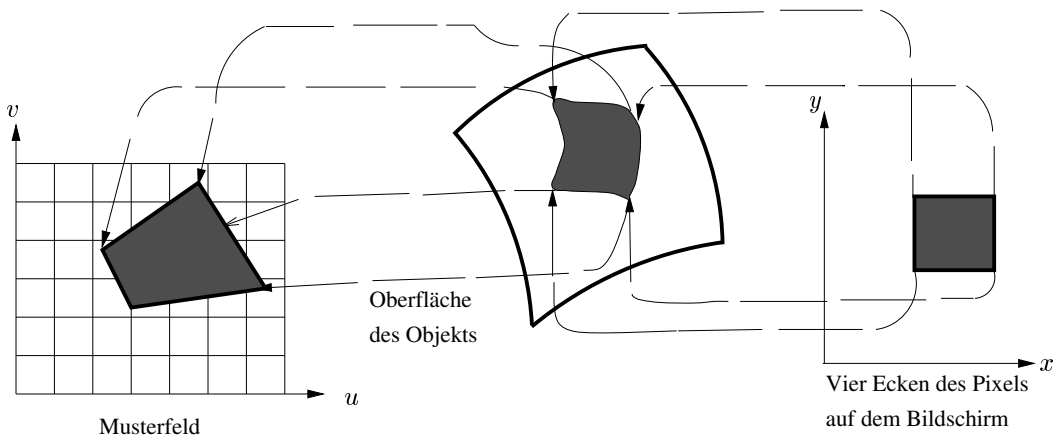


Abbildung 18.9: Transformationskette beim Texture Mapping

Zum Einfärben eines Pixels im Bildraum wird die gewichtete Durchschnittsintensität aller überdeckten Pixel im Musterraum benutzt.

Für spezielle Objekte wie stark gemasertes Holz ist die Beschreibung über Musterfelder zu speicheraufwendig, so daß prozedural definierte Muster verwendet werden.

Um den Eindruck von rauhen Oberflächen zu erwecken, speichert man im Musterfeld Zusatzinformationen über die Veränderung des Normalenvektors (*bump mapping*).

18.5 Beispiel-Applet zum Rendering

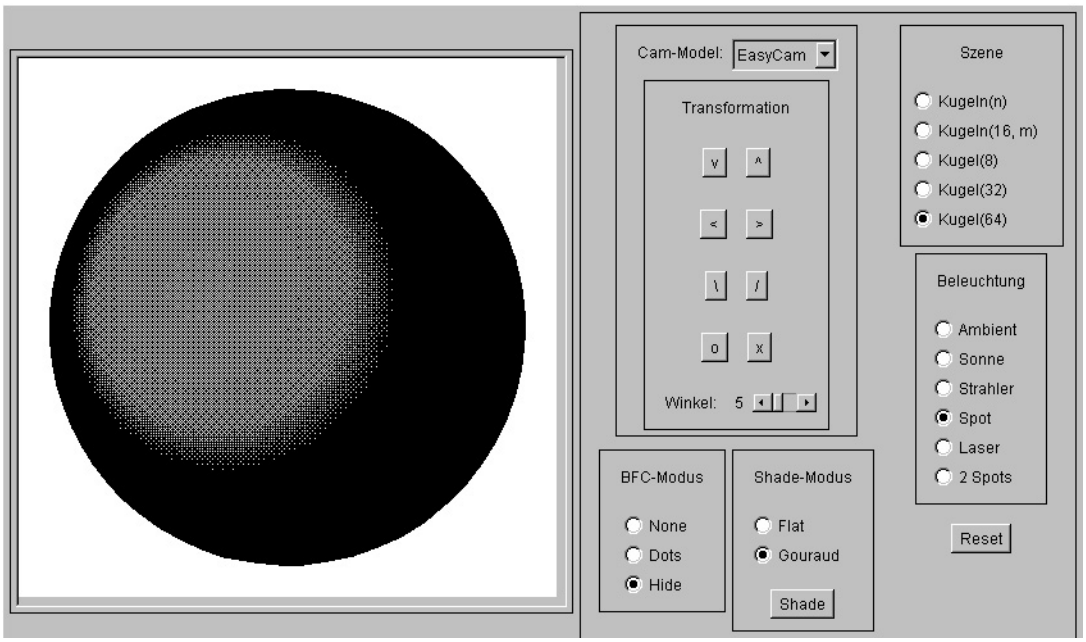


Abbildung 18.10: Screenshot vom 3D-solid-Applet

Kapitel 19

Die Viewing-Pipeline im Überblick

Hier wird im Überblick der gesamte Rendering-Prozeß schematisch dargestellt. Diese sogenannte *Viewing-Pipeline* beinhaltet zusammengefaßte Transformationen und zeigt die einzelnen Algorithmen in den jeweiligen Koordinatensystemen. Die Abweichung vom Vorgehen entlang der Transformationspipeline erklärt sich durch die Einbindung der aufwandsreduzierenden Verfahren Umgebungs-Clipping, Clipping und Back-Face Culling. Diese verringern die Anzahl und die Größe der Polygone, für die die aufwendigen Schattierungsalgorithmen durchgeführt werden müssen.

Durch die Einführung von Umgebungsboxen (Bounding Volumes) wird beim *Umgebungsclipping* zunächst statt eines komplexen Objekts ein umgebender Quader getestet. Ist dieser ganz unsichtbar, wird das Objekt nicht weiter bearbeitet. Ist er vollständig sichtbar, kann auf das (recht zeitaufwendige) Clipping verzichtet werden.

Die Viewing-Pipeline wird auf jedes Objekt der Szene angewandt. Wenn durch das Umgebungs-Clipping festgestellt wird, daß ein Objekt zumindest teilweise im View Window sichtbar ist, beginnt der Algorithmus mit dem Rendern des Objekts. Bei der Objektgenerierung werden die einzelnen Polygone des Objektprototyps im MC sukzessive berechnet und ggf. zusätzlich deformiert. Ein solches Polygon wird danach sofort gemäß der weiteren Viewing-Pipeline behandelt und unter Verwendung des z-Buffer-Algorithmus in den Bildschirmspeicher hineinschattiert. Bei der Liniendarstellung werden die Kanten des Polygons sukzessive gerastert.

Die Linien bzw. Polygone sind nach der Objektgenerierung unabhängig voneinander, so daß sie einzeln berechnet und dargestellt werden können. Die gesamte Szene besteht wegen der Flächenrepräsentation der Objekte praktisch nur aus ihnen. Der z-Buffer-Algorithmus sorgt bei der Flächendarstellung dafür, die Verdeckungseigenschaften pixelweise zu berechnen, so daß nach dem Rendering aller Polygone im Bildschirmspeicher das fertige Bild der Szene steht und ausgegeben werden kann. Die einzelnen Polygone sind sowohl bei der Liniendarstellung als auch triangulisiert beim Flat-Shading gut zu erkennen. Beim Gouraud- und besonders beim Phong-Shading tritt der gewünschte Effekt auf, daß sie fließend ineinander übergehen und nicht mehr explizit zu erkennen sind; das Bild wirkt jetzt realistisch.

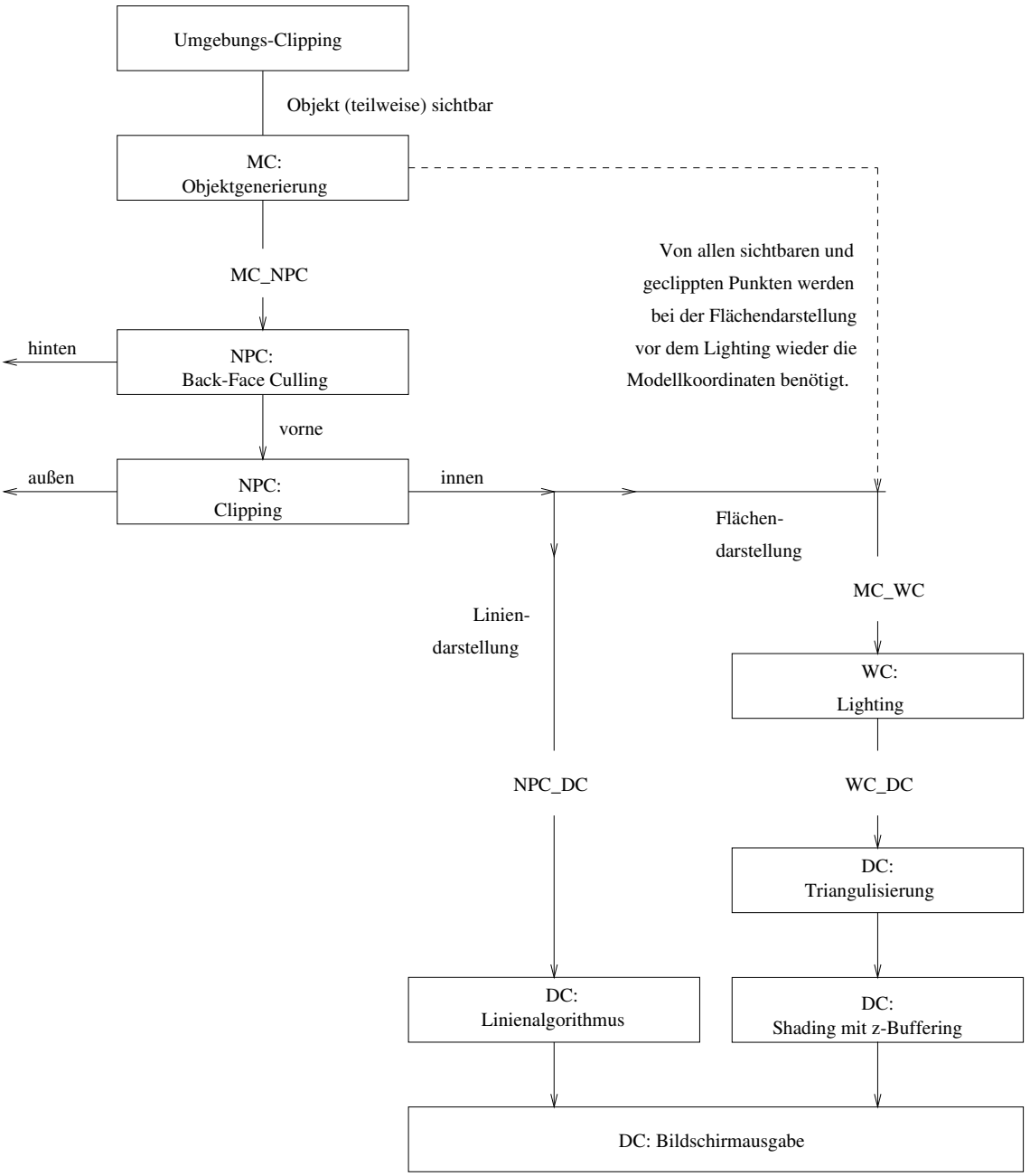


Abbildung 19.1: Komplette Viewing-Pipeline

Kapitel 20

Radiosity

20.1 Globale Beleuchtung

Ein Beleuchtungsmodell berücksichtigt bei der Berechnung der Farbe für einen Punkt das von den Lichtquellen direkt abgegebene Licht und das Licht, das den Punkt nach Reflexion und Transmission durch seine eigene und andere Flächen erreicht. Dieses indirekt reflektierte und hindurchgelassene Licht heißt *globale Beleuchtung*. Als *lokale Beleuchtung* bezeichnet man das Licht, das direkt von den Lichtquellen auf den schattierten Punkt fällt. Bisher wurde die globale Beleuchtung durch einen Term für ambiente Beleuchtung modelliert, der für alle Punkte auf allen Objekten konstant war. Dieser Term berücksichtigte weder die Positionen von Objekt und Betrachter noch Objekte, die das Umgebungslicht blockieren könnten.

In realen Szenen kommt nur ein geringer Teil des Lichts aus direkten Lichtquellen. Es gibt zwei Klassen von Algorithmen zur Erzeugung von Bildern, die die Bedeutung globaler Beleuchtung hervorheben. Das nächste Kapitel behandelt den Ray Tracing-Algorithmus, der neben der Ermittlung sichtbarer Flächen und deren Schattierung gleichzeitig Schatten, Reflexion und Brechung berechnet. Globale spiegelnde Reflexion und Transmission ergänzen dabei die für eine Fläche berechnete lokale spiegelnde, diffuse und ambiente Beleuchtung. Im Gegensatz dazu trennen die in diesem Kapitel behandelten Radiosity-Verfahren die Schattierung völlig von der Ermittlung sichtbarer Flächen. Sie berechnen erst in einem vom Blickpunkt unabhängigen Schritt alle Interaktionen einer Szene mit den Lichtquellen. Dann berechnen sie mit konventionellen Algorithmen zur Ermittlung sichtbarer Flächen und Schattierung durch Interpolation ein oder mehrere Bilder für die gewünschten Standpunkte des Betrachters.

Vom Blickpunkt abhängige Algorithmen (z.B. Ray Tracing) diskretisieren die Bildebene, um die Punkte zu ermitteln, an denen die Beleuchtungsgleichung für eine bestimmte Blickrichtung ausgewertet wird. Beleuchtungsalgorithmen, die vom Blickpunkt unabhängig sind (z.B. Radiosity), diskretisieren dagegen die Szene und verarbeiten sie weiter, um genügend Informationen zur Auswertung der Beleuchtungsgleichung an jedem beliebigen Punkt und für jede Blickrichtung zu erhalten. Die Algorithmen, die vom Blickpunkt abhängig sind, eignen sich gut zur Behandlung von Spiegelungen, die stark vom Standpunkt des Betrachters abhängen. Sie erfordern jedoch bei der Behandlung diffuser Phänomene zusätzlichen Aufwand, da sich diese über große Bildbereiche oder zwischen Bildern aus verschiedenen Blickpunkten wenig ändern. Die Algorithmen, die nicht vom Blickpunkt abhängen, modellieren diffuse Phänome-

ne dagegen effizient, haben aber bei der Behandlung von Spiegelungen einen enorm hohen Speicherbedarf.

20.2 Physikalische Ausgangslage

Dieser Algorithmus geht von der Erhaltung der Lichtenergie in einer geschlossenen Szene aus. Jeder von einer Fläche abgestrahlten oder reflektierten Energie entspricht die Reflexion oder Absorption durch andere Flächen. Die gesamte von einer Fläche abgegebene Energie heißt *Strahlung* oder *Radiosity*. Sie besteht aus der Summe der abgestrahlten Energie, der reflektierten Energie und der Energie, die durch die Fläche hindurchtritt. Ansätze, die die Strahlung der Flächen einer Szene berechnen, heißen daher *Radiosity-Verfahren*. Im Gegensatz zu konventionellen Rendering-Algorithmen berechnen Radiosity-Verfahren erst unabhängig vom Blickpunkt alle Lichtinteraktionen einer Szene. Der Term für das ambiente Licht ist nicht mehr nötig, da sie die Reflexionen zwischen den Objekten genauer behandeln. Dann werden eine oder mehrere Darstellungen gerastert. Dabei fällt nur noch der Aufwand für die Ermittlung der sichtbaren Flächen und für die Schattierung durch Interpolation an.

20.3 Die Radiosity-Gleichung (Beleuchtungsgleichung)

Die bisher betrachteten Schattierungsalgorithmen behandeln die Lichtquellen immer unabhängig von den beleuchteten Flächen. Bei den Radiosity-Verfahren kann dagegen jede Fläche Licht abstrahlen. Daher werden alle Lichtquellen mit einem inhärenten Flächeninhalt modelliert. Die Szene wird in eine endliche Anzahl n diskreter Flächenelemente (*Patches*) zerlegt. Jedes dieser Elemente hat endliche Größe, strahlt über die gesamte Fläche gleichmäßig Licht ab und reflektiert Licht. Wenn man jedes der n Flächenelemente als opaken, diffusen Lambertschen Strahler und Reflektierer betrachtet, gilt für Fläche i

$$B_i = E_i + \rho_i \sum_{j=1}^{n} B_j F_{ij}, 1 \leq i \leq n \ .$$

mit

E_i	=	von der Fläche i abgegebene Eigenstrahlung
ρ_i	=	Reflexionsvermögen der Fläche i
n	=	Anzahl der Flächen
F_{ij}	=	Anteil an der von Fläche j abgegebenen Energie, die auf Fläche i auftrifft, genannt *Formfaktor*
B_i	=	gesamte von Fläche i abgestrahlte Energie (Summe aus Eigenstrahlung und Reflexion als Energie pro Zeit und pro Flächeneinheit), genannt *Radiosity* der Fläche i

Die Gleichung besagt, daß die Energie, die eine Flächeneinheit verläßt, aus der Summe des abgestrahlten und des reflektierten Lichts besteht. Das reflektierte Licht berechnet sich aus der Summe des einfallenden Lichts, multipliziert mit dem Reflexionsvermögen. Das einfallende Licht besteht wiederum aus der Summe des Lichts, das alle Flächen der Szene verläßt, multipliziert mit dem Lichtanteil, der eine Flächeneinheit des empfangenden Flächenelements

erreicht. $B_j F_{ij}$ ist der Betrag des Lichts, das die ganze Fläche j verläßt und eine Flächeneinheit von Fläche i erreicht.

Zwischen den Formfaktoren in diffusen Szenen besteht eine nützliche Beziehung:

$$F_i \cdot F_{ij} = F_j \cdot F_{ji} \ ,$$

wobei F_i und F_j die Flächeninhalte sind.

Umordnen der Ausdrücke liefert

$$B_i - \rho_i \sum_{1 \le j \le n} B_j F_{ij} = E_i \ .$$

Also kann der Austausch von Licht innerhalb der Flächenelemente der Szene durch ein Gleichungssystem ausgedrückt werden:

$$\begin{pmatrix} 1-\rho_1 F_{11} & -\rho_1 F_{12} & \dots & -\rho_1 F_{1n} \\ -\rho_2 F_{21} & 1-\rho_2 F_{22} & \dots & -\rho_2 F_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ -\rho_n F_{n1} & -\rho_n F_{n2} & \dots & 1-\rho_n F_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ B_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ E_n \end{pmatrix}$$

Man beachte, daß der Beitrag eines Flächenelements zu seiner eigenen reflektierten Energie berücksichtigt werden muß (es könnte zum Beispiel konkav sein). Daher haben im allgemeinen nicht alle Terme auf der Diagonalen den Wert Eins.

Wenn man die Gleichung löst, erhält man für jedes Flächenelement einen Strahlungswert. Die Elemente können dann für jeden gewünschten Blickpunkt mit einem gewöhnlichen Algorithmus zur Ermittlung sichtbarer Flächen gerastert werden. Die Strahlungswerte sind die Intensitäten dieses Elements.

Gauß-Seidel-Iterations-Verfahren zur Lösung von linearen Gleichungssystemen

Die i-te Gleichung eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ lautet:

$$\sum_{j=1}^{n} A[i,j]x[j] = b[i] \ .$$

Wenn alle Diagonalelemente von A ungleich Null sind, gilt:

$$x[i] = \frac{1}{A[i,i]} \left(b[i] - \sum_{j \ne i} A[i,j]x[j] \right) \ .$$

Das Iterations-Verfahren startet mit einer Schätzung x_1, die auf der rechten Seite eingesetzt wird zur Berechnung von $x_1[1]$. Im nächsten Schritt wird zur Berechnung von $x_1[2]$ bereits $x_1[1]$ benutzt. Ein Iterationsschritt lautet also:

$$x_k[i] = \frac{1}{A[i,i]} \left(b[i] - \sum_{j=1}^{i-1} x_k[j]A[i,j] - \sum_{j=i+1}^{n} x_{k-1}[j]A[i,j] \right) \ .$$

Bei Konvergenz wird das Verfahren nach k Iterationsschritten abgebrochen, wenn $b - Ax_k$ genügend klein geworden ist.

20.4 Berechnung der Formfaktoren

Die Formfaktoren werden bestimmt mit Hilfe der Gleichung

$$F_{ij} = \frac{1}{F_i} \int_{F_i} \int_{F_j} \frac{\cos(\phi_i)\cos(\phi_j)}{\pi r_{ij}^2} b_{ij} dF_j dF_i$$

mit

ϕ_i	=	Winkel zwischen Normale auf Fläche i und Verbindungslinie zwischen Fläche i und Fläche j
ϕ_j	=	Winkel zwischen Normale auf Fläche j und Verbindungslinie zwischen Fläche i und Fläche j
r_{ij}	=	Entfernung zwischen Fläche dF_i und Fläche dF_j
b_{ij}	=	Blockierungsfunktion, falls Teile von Fläche j aus der Sicht von Fläche i verdeckt sind.
F_i	=	Flächeninhalt von Fläche i

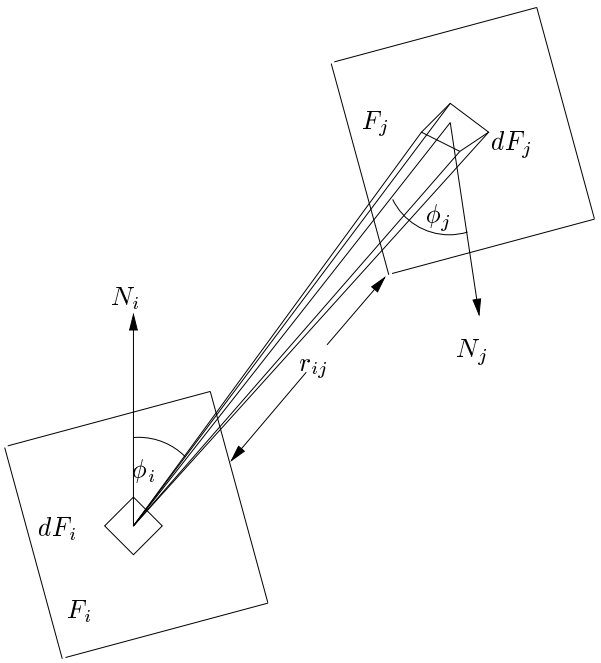


Abbildung 20.1: Der Berechnung von Formfaktoren zugrundeliegende Geometrie

Die geometrische Interpretation beschreibt den Formfaktor als das Verhältnis der Basisfläche einer Halbkugel zur Orthogonalprojektion der auf die Halbkugel projizierten Fläche: Erst

projiziert man die von F_i aus sichtbaren Teile von F_j auf eine Halbkugel mit Radius Eins um dF_i, projiziert diese Projektion orthogonal auf die kreisförmige Grundfläche der Halbkugel und dividiert schließlich durch die Kreisfläche. Die Projektion auf die halbe Einheitskugel entspricht in der Gleichung dem Term $\cos\phi_j/r_{ij}^2$, die Projektion auf die Grundfläche entspricht der Multiplikation mit $\cos\phi_i$, und die Division durch den Flächeninhalt des Einheitskreises liefert den Wert π im Nenner.

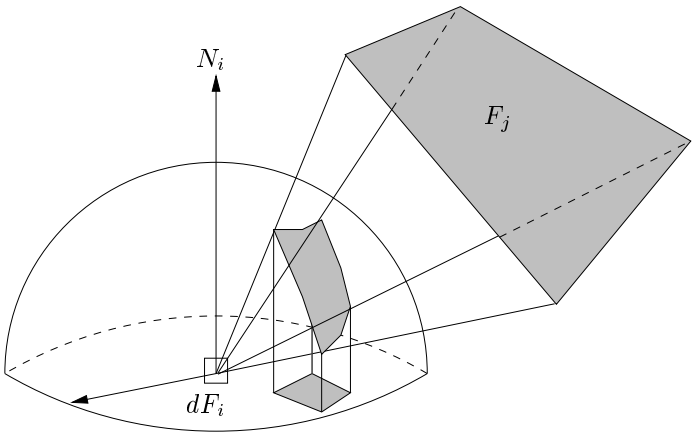


Abbildung 20.2: Geometrische Interpretation des Formfaktors

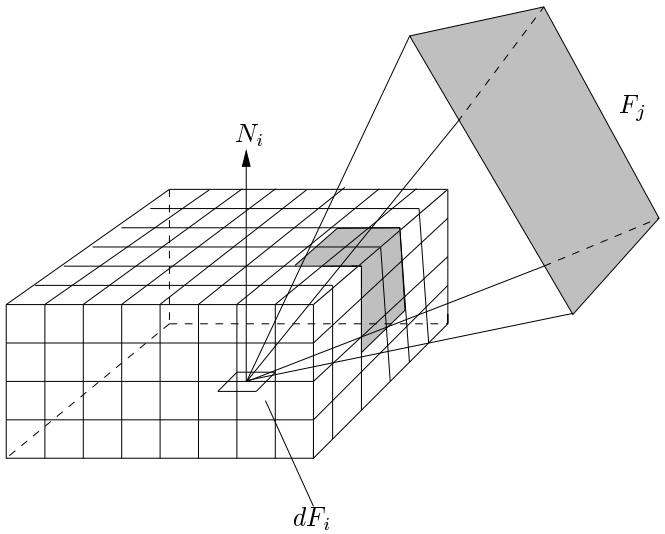


Abbildung 20.3: Simulation der Halbkugel durch Halbwürfel

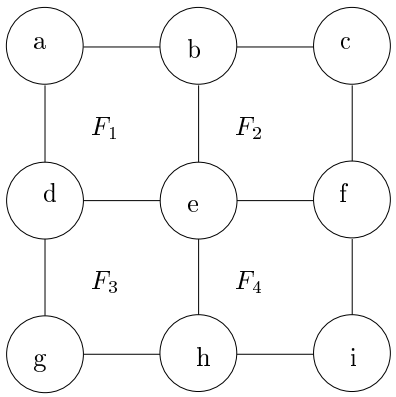
Zur numerischen Berechnung wird die Halbkugel durch einen *Halbwürfel* (hemi-cube) mit dem Zentrum im Ursprung und dem Normalvektor in der z-Achse ersetzt. Die Oberseite des Würfels ist dabei parallel zur Fläche. Jede Seite des Halbwürfels wird in ein Raster gleich großer quadratischer Zellen aufgeteilt. (Die Auflösungen reichen von 50×50 bis zu mehreren Hundert pro Seite.) Dann wird jedes Flächenelement auf die Seiten des Halbwürfels projiziert. Dazu benutzt man einen Algorithmus, der für jede Zeile die Kennung des nächsten schnei-

denden Elements speichert. Diese Elementpuffer kann man mit einem z-Puffer-Algorithmus für jede Seite des Halbwürfels berechnen, bei dem man für jede Zelle statt der Schattierung die Kennung der nächstliegenden Fläche speichert. Jeder Zelle des Halbwürfels ist ein *Delta-Formfaktor* zugeordnet, der von der Position der Zelle abhängt und vorher berechnet wird. Für eine beliebig feine Rasterung der Quaderoberfläche ergibt sich der Formfaktor F_{ij} als Summe aller von der Fläche F_j überdeckten Rasterzellen. Wird eine Rasterzelle von mehreren Flächen überdeckt, wird sie der Fläche mit der geringsten Entfernung zugerechnet. Für die Summe aller Formfaktoren einer Fläche F_i gilt

$$\sum_{j=1}^{n} F_{ij} = 1 \ .$$

20.5 Interpolation der Pixelfarben

Für jede Fläche i liege nun ihre *Radiosity* B_i vor. Hieraus interpoliert man die Strahlung für die Eckpunkte:



$$\begin{array}{lcllcl}
B(e) & = & (B_1 + B_2 + B_3 + B_4)/4 & & & \\
B(a) & = & B_1 + (B_1 - B(e)) & B(c) & = & B_2 + (B_2 - B(e)) \\
B(g) & = & B_3 + (B_3 - B(e)) & B(i) & = & B_4 + (B_4 - B(e)) \\
 & & & & & \\
B(b) & = & (B(a) + (B(c))/2 & B(d) & = & (B(a) + B(g))/2 \\
B(f) & = & (B(c) + (B(i))/2 & B(h) & = & (B(g) + B(i))/2
\end{array}$$

Nun wird jedes Patch in zwei Dreiecke zerteilt, so daß nach der Projektion die Strahlungswerte an den Dreiecksecken zur zweifachen Interpolation verwendet werden können.

20.6 Schrittweise Verfeinerung

In Anbetracht des hohen Aufwands beim bisher beschriebenen Radiosity-Algorithmus stellt sich die Frage, ob man die Ergebnisse der Beleuchtungsberechnung inkrementell approximieren kann. Die Auswertung der i-ten Zeile des Gleichungssystems liefert eine Schätzung für

die Strahlung B_i des Flächenelements, die auf den Schätzungen für die Strahlungswerte der anderen Flächenelemente basiert. Jeder Term in der Summe der Gleichung beschreibt die Auswirkung des Elements j auf die Strahlung des Elements i:

$$\text{Beitrag von } B_j \text{ zu } B_i = \rho_i B_j F_{ij} \text{ für alle } j \ .$$

Diese Methode "sammelt" also das Licht der restlichen Szene ein. Der Ansatz zur schrittweisen Verfeinerung verteilt dagegen die Strahlung eines Flächenelements auf die Szene. Dazu bietet sich die Anpassung obiger Gleichung zu

$$\text{Beitrag von } B_i \text{ zu } B_j = \rho_j B_i F_{ji} \text{ für alle } j \ .$$

an. Wenn man eine Schätzung für B_i hat, kann man den Beitrag des Flächenelements i zum Rest der Szene ermitteln, indem man vorstehende Gleichung für jedes Element j auswertet. Dazu braucht man leider F_{ji} für alle j. Jeder dieser Werte wird mit einem separaten Halbwürfel bestimmt. Dies erfordert ebensoviel Aufwand an Speicherplatz und Rechenzeit wie der ursprüngliche Ansatz. Man kann die Gleichung jedoch umschreiben, wenn man die Reziprozitätsbeziehung berücksichtigt.

$$\text{Beitrag von } B_i \text{ zu } B_j = \rho_j B_i F_{ij} \frac{F_i}{F_j} \text{ für alle } j \ .$$

Zur Auswertung dieser Gleichung für alle j sind nur die Formfaktoren nötig, die mit einem einzigen Halbwürfel um das Flächenelement i berechnet wurden. Kann man die Formfaktoren des Elements i schnell berechnen (z.B. mit z-Puffer-Hardware), kann man sie wieder löschen, sobald die Strahlungen vom Flächenelement i aus berechnet sind. Man muß also immer nur einen einzigen Halbwürfel und dessen Formfaktoren gleichzeitig berechnen und speichern.
Sobald die Strahlung eines Elements verteilt wurde, wählt man ein anderes Element aus. Ein Element kann wieder Strahlung verteilen, sobald es neues Licht von anderen Elementen erhält. Dabei wird nicht die gesamte geschätzte Radiosity des Elements i verteilt, sondern nur der Betrag ΔB_i, den das Element i seit dem letzten Verteilen empfing. Der Algorithmus läuft so lange weiter, bis die gewünschte Genauigkeit erreicht ist. Es ist sinnvoll, das Element mit der größten Differenz zu nehmen, statt die Elemente in zufälliger Reihenfolge auszuwählen. Man wählt also das Element, das noch am meisten Energie abzustrahlen hat. Da die Strahlung pro Flächeneinheit gemessen wird, wählt man ein Flächenelement, bei dem $\Delta B_i F_i$ maximal ist. Am Anfang gilt für alle Flächenelemente $B_i = \Delta B_i = E_i$. Dieser Wert ist nur bei Lichtquellen ungleich Null.

Im folgenden bezeichnet ΔB_i also die noch nicht verteilte Strahlung, d.h. die Differenz zwischen der *Radiosity* im letzten und im gegenwärtigen Iterationsschritt. Es wird ausgenutzt, daß gilt $F_{ji} = (F_{ij} \cdot F_i)/F_j$.

```
for i:= 1 to n do                          {initialisiere}
   if patch i ist Lichtquelle              {für jede Fläche}
     then Bi := ΔBi := Emissionswert       {Strahlung und Differenz}
     else Bi := ΔBi := 0
end;
```

```
repeat
   for {jede Fläche i, beginnend bei der mit der größten Ausstrahlung} do begin
     Plaziere Hemicube auf Fläche i
     Berechne F_ij für alle 1 ≤ j ≤ n
     for j := 1 to n do begin                    {für jede Fläche j tue}
        ΔR := ρ_j * ΔB_i * F_ij * F_i/F_j        {Strahlung von Fläche i}
        ΔB_j := ΔB_j + ΔR                        {Differenz erhöhen}
        B_j := B_j + ΔR                          {Strahlung erhöhen}
     end;
     ΔB_i := 0;                                  {Überschuß ist verteilt}
   end
until fertig                                     {bis zur Konvergenz}
```

Bei jeder Ausführung der äußeren FOR-Schleife verteilt ein weiteres Flächenelement seine unverbrauchte Strahlung auf die Szene. Daher werden nach der ersten Ausführung nur die Flächen beleuchtet, die selbst Lichtquellen sind sowie solche, die beim Verteilen der Strahlung des ersten Elements direkt beleuchtet werden. Rastert man am Ende jeder Ausführung des Codes ein neues Bild, so wird das erste Bild relativ dunkel und die nachfolgenden Bilder immer heller.

Abbildung 20.4 faßt den gesamten Ablauf zusammen.

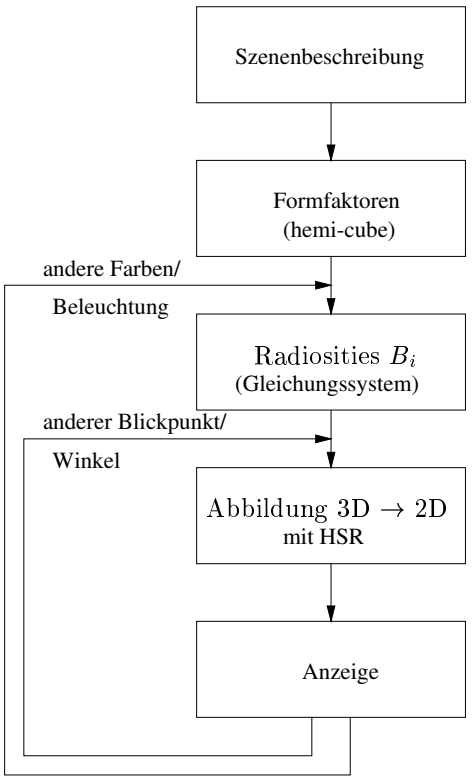
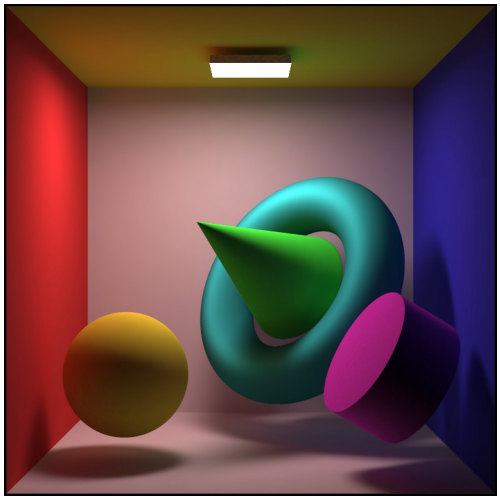


Abbildung 20.4: Ablaufschema beim Radiosityverfahren

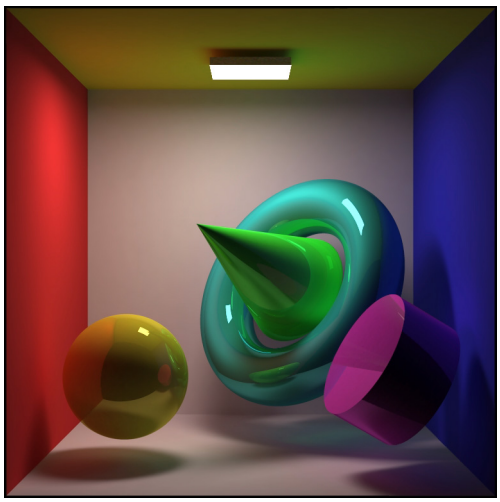
20.7 Screenshots

Auf der Seite `http://www.graphics.cornell.edu/online/research` gibt es einige Beispiele für Radiosity-Bilder.

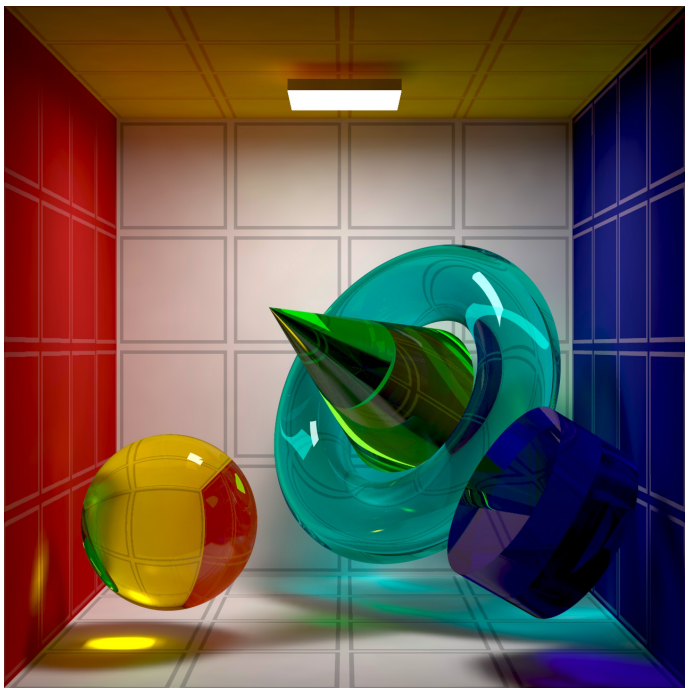
Die nächsten drei Bilder sind Screenshots vom Advanced Rendering Toolkit der Technischen Universität Wien (`http://www.cg.tuwien.ac.at/research/rendering/ART`). Hier wurde das klassische Radiosity-Verfahren um Ray-Tracing-Komponenten erweitert.



Diffuse Reflexion



Diffuse und spekulare Reflektion



Diffuse, spekulare und transparente Reflexion

Kapitel 21

Ray Tracing

21.1 Grundlagen

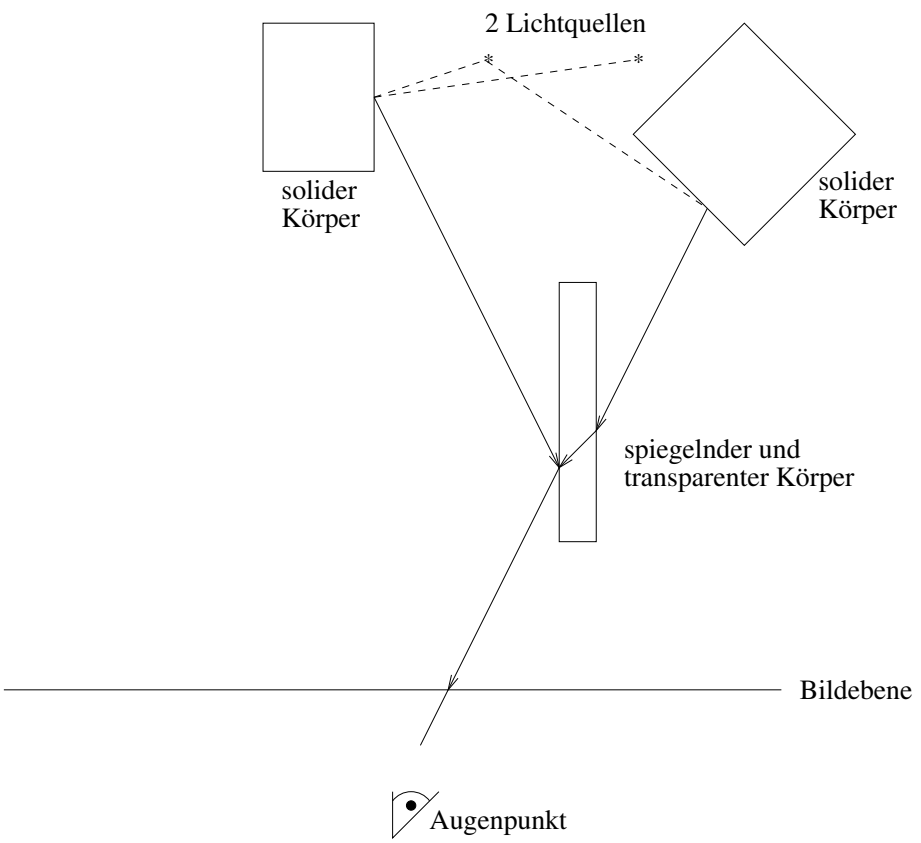


Abbildung 21.1: Prinzip der Strahlverfolgung

Verfahren mit *Ray Tracing* (Strahlverfolgung) eignen sich ausgezeichnet zur Modellierung von spiegelnden Reflexionen und von Transparenz mit Brechung (ohne Streuung). Globale Lichter werden mit einem ambienten Beleuchtungsterm ohne Richtung behandelt. Ausgehend

vom Augenpunkt wird durch jedes Pixel ein Strahl gelegt und der Schnittpunkt dieses Strahls mit dem ersten getroffenen Objekt bestimmt. Trifft der Strahl auf kein Objekt, so erhält das Pixel die Hintergrundfarbe. Ist das Objekt spiegelnd, so wird der Reflexionsstrahl berechnet und rekursiv weiterbehandelt. Ist das Objekt transparent, wird zusätzlich der gebrochene Strahl weiterbehandelt. Zur Berechnung von Schatten wird von jedem Schnittpunkt zwischen Strahl und Objekt zu jeder Lichtquelle ein zusätzlicher Strahl ausgesandt. Trifft dieser Strahl auf ein blockierendes Objekt, dann liegt der Schnittpunkt im Schatten dieser Lichtquelle, und das von ihr ausgestrahlte Licht geht in die Intensitätsberechnung des Punktes nicht ein.

21.2 Ermittlung sichtbarer Flächen durch Ray Tracing

Verfahren mit *Ray Tracing* ermitteln die Sichtbarkeit von Flächen, indem sie imaginäre Lichtstrahlen des Betrachters zu den Objekten der Szene verfolgen. Man wählt ein Projektionszentrum (das Auge des Betrachters) und ein Window in einer beliebigen Bildebene. Das Window wird durch ein regelmäßiges Gitter aufgeteilt, dessen Elemente den Pixeln in der gewünschten Auflösung entsprechen. Dann schickt man für jedes Pixel im Window einen *Augstrahl* vom Projektionszentrum durch den Mittelpunkt des Pixels auf die Szene. Das Pixel erhält die Farbe des ersten getroffenen Objekts. Das folgende Programm enthält den Pseudocode für diesen einfachen Ray Tracer.

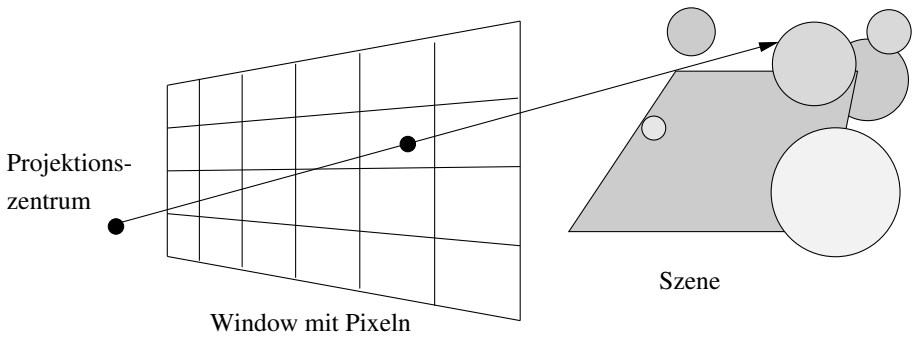


Abbildung 21.2: Strahl durch Bildebene

```
Wähle Projektionszentrum und Window in der Bildebene;
for(jede Rasterzeile des Bildes){
   for(jedes Pixel der Rasterzeile){
     Berechne den Strahl vom Projektionszentrum durch das Pixel;
     for(jedes Objekt der Szene){
        if(Objekt wird geschnitten und liegt bisher am nächsten)
           Speichere Schnittpunkt und Name des Objekts;
     }
     Setze das Pixel auf die Farbe des nächstliegenden Objektschnittpunkts;
   }
}
```

21.3 Berechnung von Schnittpunkten

Hauptaufgabe eines jeden Ray Tracers ist es, den Schnittpunkt eines Strahls mit einem Objekt zu bestimmen. Man benutzt dazu die parametrisierte Darstellung eines Vektors. Jeder Punkt (x, y, z) auf dem Strahl von (x_0, y_0, z_0) nach (x_1, y_1, z_1) wird durch einen bestimmten Wert definiert mit

$$x = x_0 + t(x_1 - x_0), \quad y = y_0 + t(y_1 - y_0), \quad z = z_0 + t(z_1 - z_0) \ .$$

Zur Abkürzung definiert man $\Delta x, \Delta y$ und Δz als

$$\Delta x = x_1 - x_0, \quad \Delta y = y_1 - y_0, \quad \Delta z = z_1 - z_0 \ .$$

Damit kann man schreiben

$$x = x_0 + t\Delta x, \quad y = y_0 + t\Delta y, \quad z = z_0 + t\Delta z \ .$$

Ist (x_0, y_0, z_0) das Projektionszentrum und (x_1, y_1, z_1) der Mittelpunkt eines Pixels im Window, so durchläuft t zwischen diesen Punkten die Werte von Null bis Eins. Negative Werte für t liefern Punkte hinter dem Projektionszentrum, Werte größer als Eins stellen Punkte auf der Seite des Windows dar, die vom Projektionszentrum abgewandt ist. Man braucht für jeden Objekttyp eine Darstellung, mit der man den Wert von t am Schnittpunkt des Strahls mit dem Objekt bestimmen kann. Die Kugel bietet sich dafür als eines der einfachsten Objekte an. Aus diesem Grund tauchen Kugeln auch so oft in Ray-Tracing-Bildern auf. Eine Kugel um den Mittelpunkt (a, b, c) und Radius r kann durch die Gleichung

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$$

dargestellt werden. Zur Berechnung des Schnittpunkts multipliziert man die Gleichung aus und setzt x, y und z aus der Gleichung von oben ein.

Man erhält eine quadratische Gleichung in t, deren Koeffizienten nur die Konstanten aus den Gleichungen der Kugel und des Strahls enthalten. Man kann sie also mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen lösen. Wenn es keine reellen Lösungen gibt, schneidet der Strahl die Kugel nicht. Gibt es genau eine Lösung, dann berührt der Strahl die Kugel. Andernfalls geben die beiden Lösungen die Schnittpunkte mit der Kugel an. Der Schnittpunkt mit dem kleinsten positiven t-Wert liegt am nächsten.

Man muß zur Schattierung der Fläche die Flächennormale im Schnittpunkt berechnen. Im Fall der Kugel ist das besonders einfach, weil die (nicht normalisierte) Normale einfach der Vektor vom Kugelmittelpunkt zum Schnittpunkt ist: Die Kugel mit Mittelpunkt (a, b, c) hat im Schnittpunkt (x, y, z) die Flächennormale $((x - a)/r, (y - b)/r, (z - c)/r)$.

Es ist etwas schwieriger, den Schnittpunkt des Strahls mit einem Polygon zu berechnen. Um festzustellen, ob der Strahl ein Polygon schneidet, testet man zuerst, ob der Strahl die Ebene des Polygons schneidet und anschließend, ob der Schnittpunkt innerhalb des Polygons liegt.

21.4 Effizienzsteigerung zur Ermittlung sichtbarer Flächen

Die vorgestellte einfache, aber rechenintensive Version des Ray-Tracing-Algorithmus schneidet jeden Augstrahl mit jedem Objekt der Szene. Für ein Bild der Größe 1024×1024 mit 100 Ob-

jekten wären daher 100 Mio. Schnittpunktberechnungen erforderlich. Ein System verbraucht bei typischen Szenen 75-95 Prozent der Rechenzeit für die Schnittpunktroutine. Daher konzentrieren sich die Ansätze zur Effizienzsteigerung auf die Beschleunigung der Schnittpunktberechnungen oder deren völlige Vermeidung.

Optimierung der Schnittpunktberechnungen

Die Formel für den Schnittpunkt mit einer Kugel läßt sich verbessern. Wenn man die Strahlen so transformiert, daß sie entlang der z-Achse verlaufen, kann man die gleiche Transformation auf die getesteten Objekte anwenden. Dann liegen alle Schnittpunkte bei $x = y = 0$. Dieser Schritt vereinfacht die Berechnung der Schnittpunkte. Das nächstliegende Objekt erhält man durch Sortieren der z-Werte. Mit der inversen Transformation kann man den Schnittpunkt dann für die Schattierungsberechnungen zurücktransformieren.

Begrenzungsvolumina eignen sich besonders gut dazu, die Zeit für die Berechnung der Schnittpunkte zu reduzieren. Man umgibt ein Objekt, für das die Schnittpunktberechnungen sehr aufwendig sind, mit einem Begrenzungsvolumen, dessen Schnittpunkte einfacher zu berechnen sind, z.B. Kugel, Ellipsoid oder Quader. Das Objekt wird nur dann getestet, wenn der Strahl das Begrenzungsvolumen schneidet.

Hierarchien

Begrenzungsvolumina legen zwar selbst noch keine Reihenfolge oder Häufigkeit der Schnittpunkttests fest. Sie können aber in verschachtelten Hierarchien organisiert werden. Dabei bilden die Objekte die Blätter, die inneren Knoten begrenzen ihre Söhne. Hat ein Strahl keinen Schnittpunkt mit einem Vaterknoten, dann gibt es garantiert auch keinen Schnittpunkt mit einem seiner Söhne. Beginnt der Schnittpunkttest also an der Wurzel, dann entfallen ggf. trivialerweise viele Zweige der Hierarchie (und damit viele Objekte).

Bereichsunterteilung

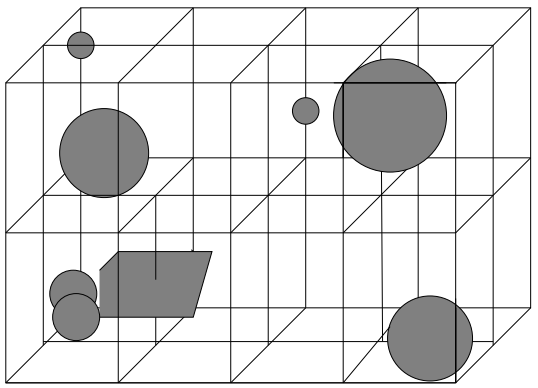


Abbildung 21.3: Unterteilung der Szene durch ein regelmäßiges Gitter

Die Hierarchie von Begrenzungsvolumina organisiert die Objekte von unten nach oben. Die Bereichsunterteilung teilt dagegen von oben nach unten auf. Zuerst berechnet man die *bounding box* der ganzen Szene. Bei einer Variante unterteilt man die *bounding box* dann in ein regelmäßiges Gitter gleich großer Bereiche. Jedem Bereich wird eine Liste mit den Objekten zugewiesen, die entweder ganz oder teilweise darin enthalten sind. Zur Erzeugung der Listen weist man jedes Objekt einem oder mehreren Bereichen zu, die dieses Objekt enthalten. Ein

Strahl muß jetzt nur noch mit den Objekten in den durchlaufenen Bereichen geschnitten werden. Außerdem kann man die Bereiche in der Reihenfolge untersuchen, in der sie vom Strahl durchlaufen werden. Sobald es in einem Bereich einen Schnittpunkt gibt, muß man keine weiteren Bereiche mehr testen. Man muß jedoch alle anderen Objekte des Bereichs untersuchen, um das Objekt mit dem nächstliegenden Schnittpunkt zu ermitteln.

21.5 Rekursives Ray Tracing

In diesem Abschnitt wird der Basisalgorithmus zum Ray Tracing auf die Behandlung von Schatten, Reflexion und Brechung erweitert. Der einfache Algorithmus ermittelte die Farbe eines Pixels am nächsten Schnittpunkt eines Augstrahls und eines Objekts mit einem beliebigen der früher beschriebenen Beleuchtungsmodelle. Zur Schattenberechnung wird ein zusätzlichen Strahl vom Schnittpunkt zu allen Lichtquellen geschickt. Schneidet einer dieser *Schattenstrahlen* auf seinem Weg ein Objekt, dann liegt das Objekt am betrachteten Punkt im Schatten, und der Schattierungsalgorithmus ignoriert den Beitrag der Lichtquelle dieses Schattenstrahls.

Der rekursive Ray-Tracing-Algorithmus startet zusätzlich zu den Schattenstrahlen weitere *Spiegelungs-* und *Brechungsstrahlen* im Schnittpunkt (siehe Abbildung 21.4). Diese Spiegelungs-, Reflexions- und Brechungsstrahlen heißen *Sekundärstrahlen*, um sie von den *Primärstrahlen* zu unterscheiden, die vom Auge ausgehen. Gibt es bei dem Objekt spiegelnde Reflexion, dann wird ein Spiegelungsstrahl um die Flächennormale in Richtung r gespiegelt. Ist das Objekt transparent, und es gibt keine totale innere Reflexion, startet man einen Brechungsstrahl entlang t in das Objekt. Der Winkel wird nach dem Gesetz von Snellius bestimmt.

Jeder dieser Reflexions- und Brechungsstrahlen kann wiederum neue Spiegelungs-, Reflexions- und Brechungsstrahlen starten.

Typische Bestandteile eines *Ray-Tracing*-Programms sind die Prozeduren `shade` und `intersect`, die sich gegenseitig aufrufen. `shade` berechnet die Farbe eines Punktes auf der Oberfläche. Hierzu werden die Beiträge der reflektierten und gebrochenen Strahlen benötigt. Diese Beiträge erfordern die Bestimmung der nächstgelegenen Schnittpunkte, welche die Prozedur `intersect` liefert. Der Abbruch der Strahlverfolgung erfolgt bei Erreichen einer vorgegebenen Rekursionstiefe oder wenn ein Strahl kein Objekt trifft.

Seien v, N die normierten Vektoren für Sehstrahl und Normale. Sei $n = n_2/n_1$ das Verhältnis der beiden Brechungsindizes. Dann sind die Vektoren r und t, die im Schnittpunkt P zur Weiterverfolgung des reflektierten und gebrochenen Strahls benötigt werden, definiert durch

$$\begin{aligned} r &= v + 2\cos(\phi)N \\ t &= (-\cos(\phi) - q)N + v \\ \text{mit } q &= \sqrt{n^2 - 1 + \cos^2(\phi)} \end{aligned}$$

Ist p ein imaginärer Ausdruck, liegt Totalreflexion vor, und der Transmissionsanteil wird gleich Null gesetzt.

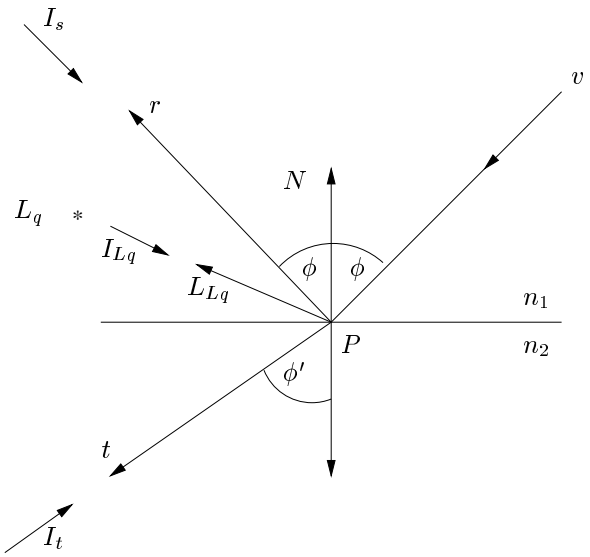


Abbildung 21.4: Einflußgrößen für Punkt P

In die Berechnung der Farbe im Punkt P geht die gewichtete Summe der in den einzelnen Rekursionsschritten berechneten Farbintensitäten ein. Unter Berücksichtigung des *Phong*-Modells ergibt sich

$$I = k_a I_H + k_d \sum_{Lq} I_{Lq}(N \cdot L_{Lq}) + k_s(I_s + \sum_{Lq} I_{Lq}(A \cdot R_{Lq})^c) + k_t I_t$$

mit

k_a	ambienter Reflexionskoeffizient
I_H	Hintergrundbeleuchtung
k_d	diffuser Reflexionskoeffizient
I_{Lq}	Intensität der Lichtquelle
N	Normale auf Ebene
L_{Lq}	Vektor zur Lichtquelle
k_s	spiegelnder Reflexionskoeffizient
I_s	globale Reflexionssintensität
A	Vektor zum Augenpunkt
R_{Lq}	Reflexionsvektor für Lichtquelle L_q
c	spekularer Exponent
k_t	Transmissionskoeffizient (materialabhängig)
I_t	Transmissionsintensität

Pseudocode für einfaches rekursives Ray Tracing

```
Wähle Projektionszentrum und Window in der view plane;
for(jede Rasterzeile des Bildes){
   for(jedes Pixel der Rasterzeile){
     Ermittle Strahl vom Projektionszentrum durch das Pixel;
     pixel = RT_intersect(ray, 1);
   }
}

/* Schneide den Strahl mit Objekten, und berechne die Schattierung am nächsten */
/* Schnittpunkt. Der Parameter depth ist die aktuelle Tiefe im Strahlenbaum. */

RT_color RT_intersect(RT_ray ray, int depth)
{
   Ermittle den nächstliegenden Schnittpunkt mit einem Objekt;
   if(Objekt getroffen){
     Berechne die Normale im Schnittpunkt;
     return RT_shade(nächstliegendes getroffenes Objekt, Strahl, Schnittpunkt,
                     Normale, depth);
   }
   else
     return HINTERGRUND_FARBE;
}


/* Berechne Schattierung für einen Punkt durch Verfolgen der Schatten-, */
/* Reflexions- und Brechungsstrahlen */

RT_color RT_shade(
   RT_object object,          /* Geschnittenes Objekt */
   RT_ray ray,                /* Einfallender Strahl */
   RT_point point,            /* Schnittpunkt, der schattiert werden soll */
   RT_normal normal,          /* Normale in dem Punkt */
   int depth)                 /* Tiefe im Strahlenbaum */
{
RT_color color;               /* Farbe des Strahls */
RT_ray rRay, tRay, sRay;      /* Reflexions-, Brechungs- und Schattenstrahlen */
RT_color rColor, tColor;      /* Farbe des reflektierten und gebrochenen Strahls */

   color = Term für das ambiente Licht;

   for(jede Lichtquelle){
     sRay = Strahl von der Lichtquelle zum Punkt;
     if(Skalarprodukt der Normalen mit der Richtung zum Licht ist positiv){
        Berechne, wieviel Licht von opaken und transparenten Flächen blockiert wird;
```

```
        Skaliere damit die Terme für diffuse und spiegelnde Reflexion, bevor sie
        zur Farbe addiert werden;
     }
}
if(depth < maxDepth){        /* Bei zu großer Tiefe beenden */
     if(Objekt reflektiert){
        rRay = Strahl vom Punkt in Reflexionsrichtung;
        rColor = RT_intersect(rRay, depth + 1);
        Skaliere rColor mit dem Spiegelungskoeffizienten,
        und addiere den Wert zur Farbe;
     }
     if(Objekt ist transparent){
        tRay = Strahl vom Punkt in Brechungsrichtung;
        if(es gibt keine totale interne Reflexion){
           tColor = RT_intersect(tRay, depth + 1);
           Skaliere tColor mit dem Transmissionskoeffizienten,
           und addiere den Wert zur Farbe;
        }
     }
   }
   return color;             /* Liefere die Farbe des Strahls zurück */
}
```

Ray Tracing ist besonders anfällig für Probleme, die durch die begrenzte Rechengenauigkeit entstehen. Dies zeigt sich vor allem bei der Berechnung der Schnittpunkte sekundärer Strahlen mit den Objekten. Wenn man die x-, y- und z-Koordinaten eines Objekts mit einem Augstrahl berechnet hat, dienen sie zur Definition des Startpunkts eines Sekundärstrahls. Für diesen muß dann der Parameter t bestimmt werden. Wird das eben geschnittene Objekt mit dem neuen Strahl geschnitten, hat t wegen der begrenzten Rechengenauigkeit oft einen kleinen Wert ungleich Null. Dieser falsche Schnittpunkt kann sichtbare Probleme bewirken.

21.6 Public Domain Ray Tracer Povray

Der "Persistence of Vision Ray Tracer" (POV-Ray) ist ein urheberrechtlich geschütztes Freeware-Programm zum Berechnen einer fotorealitischen Projektion aus einer 3-dimensionalen Szenenbeschreibung auf der Grundlage der Strahlverfolgung (`http://www.povray.org`). Seine Implementierung basiert auf DKBTrace 2.12 von David Buck & Aaron Collins. Zur Unterstützung des Anwenders gibt es einige include-Files mit vordefinierten Farben, Formen und Texturen.

```
#include "colors.inc"
#include "textures.inc"

camera {
       location <3, 3, -1>
       look_at  <0, 1,  2>
}
light_source { <0, 4, -3> color White}
light_source { <0, 6, -4> color White}
light_source { <6, 4, -3> color White}

plane {
       <0, 1, 0>, 0
       pigment {
               checker
                      color White
                      color Black
       }
}

sphere {
       <0, 2, 4>, 2
       texture {
               pigment {color Orange}
               normal  {bumps 0.4  scale 0.2}
               finish  {phong 1}
       }
}

box {
       <-1, 0, -0.5>,
       < 1, 2,  1.5>
       pigment {
               DMFWood4
               scale 2
       }
       rotate y*(-20)
}
```

Povray-Quelltext scene.pov

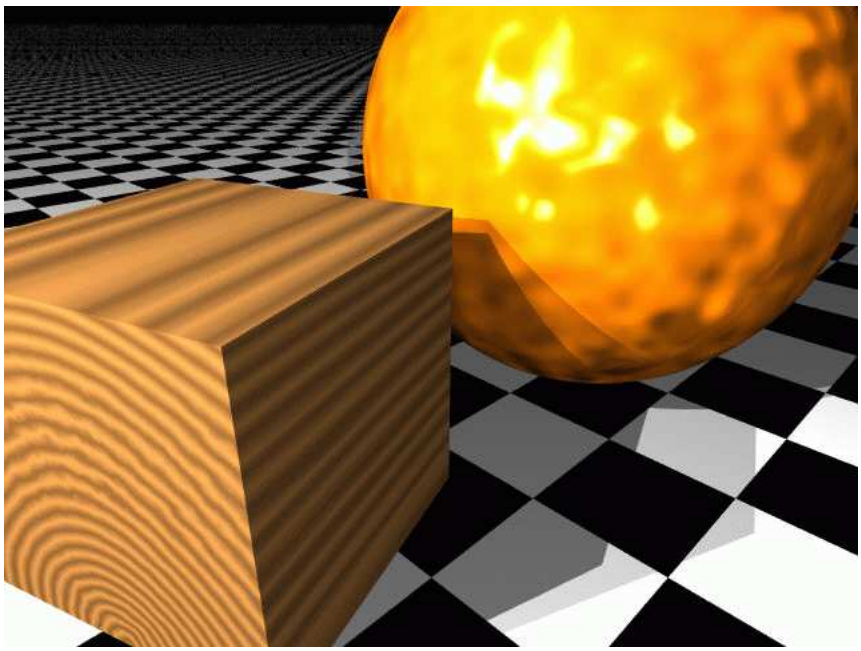


Abbildung 21.5: Povray-Bild zur Szenenbeschreibung

Der Aufruf von *povray* erfolgt zweckmäßigerweise mit einem Shell-Skript, dem der Name der zu bearbeitenden Datei als einziger Parameter übergeben wird:

```
#!/bin/sh

povray +I$1.pov +Oscene.tga +L/usr/lib/povray3/include +W320 +H200
```

Die vom Ray-Tracer erstellte Statistik lautet:

```
scene.pov Statistics, Resolution 320 x 200
-------------------------------------------------------------------------------
Pixels:           64000   Samples:           64000   Smpls/Pxl: 1.00
Rays:             64000   Saved:                 0   Max Level: 1/5
-------------------------------------------------------------------------------
Ray->Shape Intersection          Tests       Succeeded  Percentage
-------------------------------------------------------------------------------
Box                             238037           40342     16.95
Plane                           238037           62400     26.21
Sphere                          238037           50948     21.40
-------------------------------------------------------------------------------
Calls to Noise:                  0   Calls to DNoise:          83403
-------------------------------------------------------------------------------
Shadow Ray Tests:           522111   Succeeded:                24497
-------------------------------------------------------------------------------
Smallest Alloc:                 12 bytes   Largest:            12308
Peak memory used:           103504 bytes
-------------------------------------------------------------------------------
Time For Trace:    0 hours  0 minutes  18.0 seconds (18 seconds)
    Total Time:    0 hours  0 minutes  18.0 seconds (18 seconds)
```

Kapitel 22

Caligary trueSpace

3D-Modellerierung unter Verwendung von

- hierarchischer Objektstruktur,
- Polygonvereinigung, -schnitt, -komplement,
- Translation, Skalierung, Rotation,
- Extrusion,
- Verformung,
- Drehkörpern.

Projektion und Rendern unter Berücksichtigung von

- Lichtquellen,
- Kamerastandpunkten,
- Spiegelung, Transparenz, Lichtbrechung,
- Texture Mapping, Bump Mapping.

Animation durch

- Keyframes,
- Pfade.

Ausgabe als

- Bitmapdateien,
- VRML-Welten,
- AVI-Files.

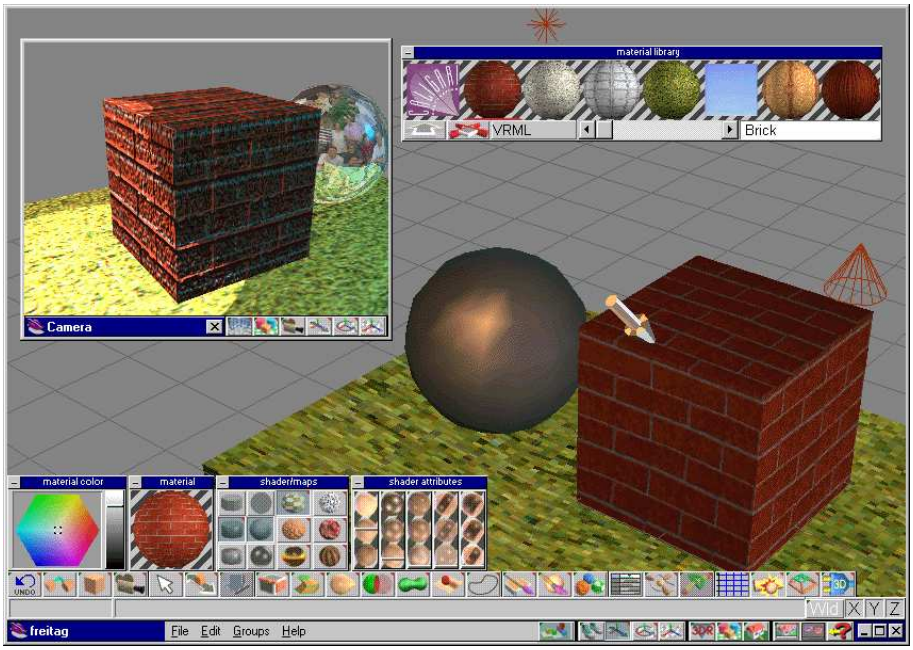


Abbildung 22.1: Screenshot vom 3D-Werkzeug Caligary trueSpace

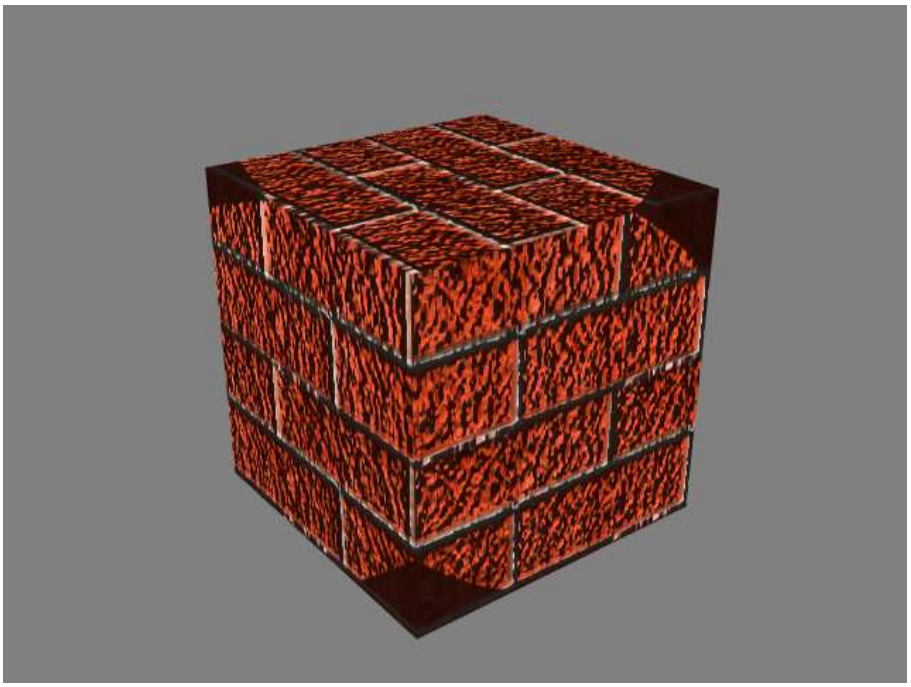


Abbildung 22.2: Würfel, gerendert mit Texture-Mapping, Bump-Mapping und Spotlicht

Abbildung 22.3: Kugel, gerendert mit spiegelnder Oberfläche und Environment-Textur

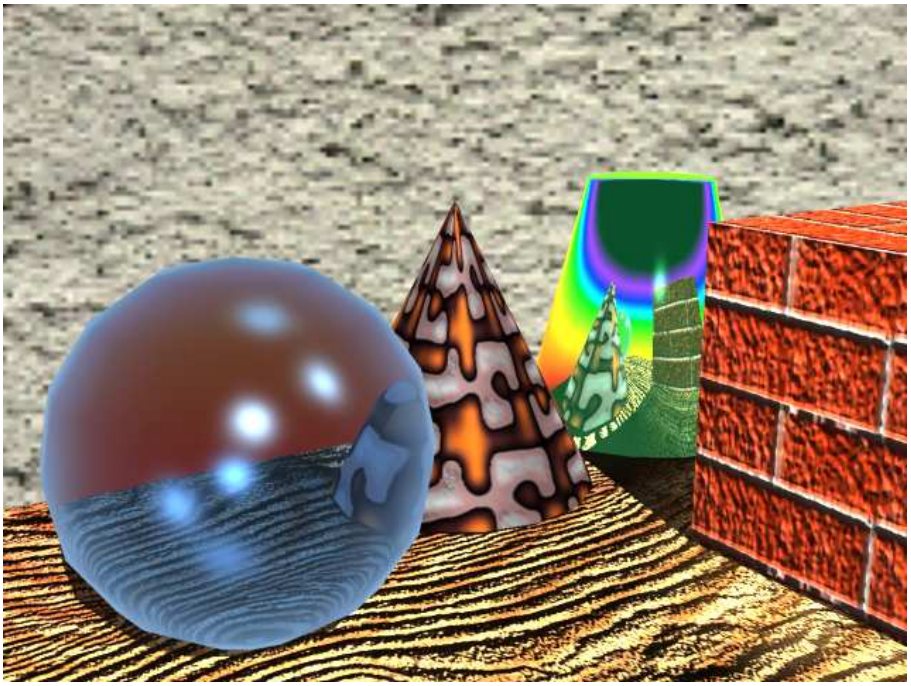


Abbildung 22.4: Szene mit 5 Objekten, gerendert im Raytracer-Modus

Kapitel 23

VRML

VRML, sprich Wörmel, ist eine für das WWW entworfene Virtual Reality Modelling Language zur Beschreibung von 3-dimensionalen Szenen mit multimedialen Komponenten und Animation. Die gerenderte Projektion der Szene kann von jedem Web-Browser betrachtet werden, der über ein passendes Plugin verfügt.

23.1 Geschichte

Bei der Nutzung von Computer-Resourcen läßt sich ein weiterer Paradigmenwechsel beobachten: Während in der EDV-Gründerzeit speziell ausgebildete Techniker am Mainframe-Computer Befehle eintippten, danach einige Jahrzehnte später Kopfarbeiter per Drag & Drop Fensterelemente manipulierten, surft inzwischen jedermann und -frau in einer weltweit vernetzten multimedialen Landschaft. Der Kontext hat sich also von institutionell über persönlich zu sozial gewandelt.

Aus diesem Zeitgeist heraus diskutierten im April 1994 auf der 1st International WWW Conference in Genf Tim Berners-Lee, einer der Väter des WWW, mit den beiden Autoren des Systems Labyrinth, Mark Pesce und Tony Parisi. Es wurde eine Mailing List aufgesetzt, die schon nach wenigen Wochen mit mehr als 1000 Teilnehmern über Syntax für Strukturen, Verhalten und Kommunikation debattierte. Bereits im Oktober 1994 wurde auf der 2nd International WWW Conference in Chicago VRML 1.0 vorgestellt, ein Entwurf, der wesentlich vom Silicon Graphics System Open Inventor inspiriert war. VRML 1.0 konnte bereits geometrische Grundkörper und Polygone in einem Koordiantensystem plazieren und ihre Farbe und Materialeigenschaften spezifizieren. Auch ließen sich durch Hyperlinks Objekte beliebig im Web referieren. Abgesehen von dieser Möglichkeit der Interaktion handelte es sich allerdings um rein statische Szenen.

Diesem Manko sollte eine schnellstens eingerichtete VAG (VRML Architecture Group) abhelfen, welche Überlegungen zur Animation und zur Integration multimedialer Komponenten wie Sound und Video koordinierte. Zur 1st International VRML Conference im Dez. 1995 war es dann soweit: Als Sieger einer Ausschreibung für VRML 97 ging Moving Worlds von Silicon Graphics nach einer On-Line-Wahl. Überarbeitete Syntax sorgte für die Beschreibung statischer Szenen mit multimedialen Bestandteilen und ein neues Event-Handling-Konzept erlaubte Animation dieser Szenen sowie Interaktion mit dem Benutzer.

23.2 Einbettung

VRML-Szenen werden beschrieben in ASCII-Dateien mit der Endung *.wrl, welche innerhalb einer HTML-Seite mit dem EMBED-Kommando referiert werden, z.B.

```
<EMBED SRC=zimmer.wrl  WIDTH=600 HEIGHT=400>
```

Ein entsprechend konfigurierter Web-Server schickt dem anfordernden Clienten als Vorspann dieser Daten den Mime-Typ VRML, worauf das zur Betrachtung installierte Plugin, z.B. Cosmo Player 2.0 von Silicon Graphics, die eingehenden Daten in eine interne Datenstruktur einliest, von wo sie zur Berechnung einer fotorealistischen Projektion verwendet werden. In welcher Weise Blickwinkel und Orientierung in der Szene modifiziert werden können, bleibt dem Plugin überlassen: Mit Mauszeiger und Keyboard Shortcuts wandert der Benutzer durch eine virtuelle Welt, verkörpert im wahrsten Sinne des Wortes durch einen Avatar, seiner geometrischen Repräsentation, beschränkt in seiner Beweglichkeit durch physikalische Restriktionen und durch eine simulierte Schwerkraft.

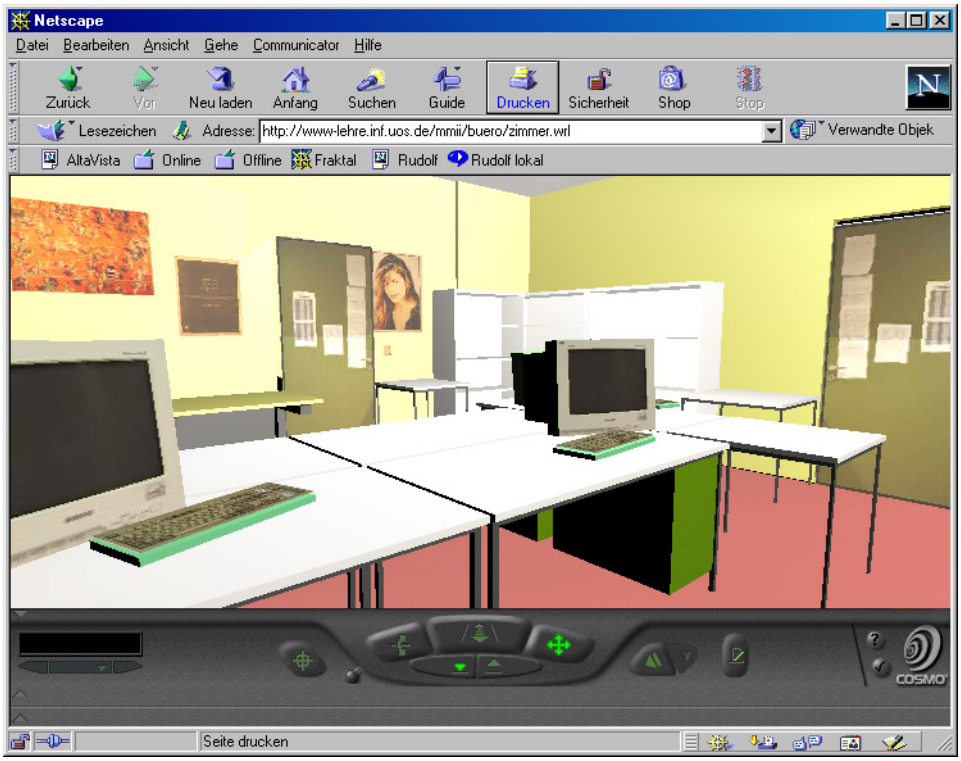


Abbildung 23.1: Screenshot vom Cosmo Player Plugin

23.3 Geometrie

Wichtigster Bestandteil von VRML-Szenen ist der sogenannte Knoten (meistens mit großem Anfangsbuchstaben geschrieben) der ähnlich eines Programmiersprachenrecords aus Feldern verschiedenen Typs besteht (meistens klein geschrieben). Diese Felder verweisen entweder auf nicht weiter strukturierte Objektknoten oder andere Gruppenknoten, die wiederum mittels ihrer Felder verzweigen können.

Beispiel 1 zeigt den Aufbau einer Szene, in der eine Kugel mit Radius 1.5 im Ursprung des Weltkoordinatensystems plaziert wird. Die x-Richtung entspricht der horizontalen Bewegung, y beschreibt die vertikale Richtung und z wächst auf den Betrachter zu. Der Sphere-Knoten hat dabei als einziges (optionales) Feld den Radius. Diese Kugel wird referiert über das geometry-Feld des Shape-Knotens, zuständig für die Gestaltung eines Objekts. Über das appearance-Feld wird die Materialbeschaffenheit in Form einer RGB-Farbe und eines Reflexions-Koeffizienten spezifiziert. Der Shape-Knoten wiederum ist als eins der Kinder im Transform-Knoten eingetragen, der über ein translation-Feld für die Verschiebung der Kugel sorgt.

```
#VRML V2.0 utf8
# kugel.wrl:
# gruene, stark reflektierende  Kugel mit Radius 1.5

Transform {                         # Plaziere
  translation 0 0 0                 # im Ursprung
  children [
    Shape {                         # eine Gestalt
      geometry Sphere {             # von der Form einer Kugel
        radius 1.5                  # mit Durchmesser 1.5
      }
      appearance Appearance {       # in der Erscheinung
        material Material {         # mit Materialbeschaffenheit
          diffuseColor 0 1 0        # gruene Farbe
          shininess 0.9             # stark reflektierend
        }
      }
    }
  ]
}
```

kugel.wrl

23.4 Polygone

Neben den Grundbausteinen Sphere (Kugel), Box (Quader), Cone (Kegel) und Cylinder (Zylinder) lassen sich eigene geometrische Gebilde konstruieren. Ausgehend von einer Liste von 3-D-Punkten im Raum werden jeweils gegen den Uhrzeigersinn alle Punkte durchlaufen, die ein Face (durch Polygon approximierte Körperfläche) aufspannen. Beispiel 2 zeigt die Definition einer 5-farbigen Pyramide mit quadratischer Grundfläche.

```
#VRML V2.0 utf8
# pyramide.wrl:
# selbstdefinierte 5-seitige Pyramide

Shape {
  geometry IndexedFaceSet {

    coord Coordinate {
      point [            # beteiligte Punkte
         0  3  0         # 0. Pyramidenpunkt (Spitze)
         0  0 -2         # 1. Pyramidenpunkt (Norden)
        -2  0  0         # 2. Pyramidenpunkt (Westen)
         0  0  2         # 3. Pyramidenpunkt (Sueden)
         2  0  0         # 4. Pyramidenpunkt (Osten )
      ]
    }

    coordIndex [         # Polygone gegen Uhrzeiger, Ende: -1
         4  3  2  1 -1   # 0. Face: Punkte 4 3 2 1 (Grundflaeche)
         0  1  2    -1   # 1. Face: Punkte 0 1 2   (Nordwesten)
         0  2  3    -1   # 2. Face: Punkte 0 2 3   (Suedwesten)
         0  3  4    -1   # 3. Face: Punkte 0 3 4   (Suedosten)
         0  4  1         # 4. Face: Punkte 0 4 1   (Nordosten)
    ]

    colorPerVertex FALSE
    color Color {
        color [          # pro Face eine Farbe benennen
          0 1 1          # 0. Face: Cyan
          1 0 0          # 1. Face: Rot
          1 1 0          # 2. Face: Gelb
          0 1 0          # 3. Face: Gruen
          0 0 1          # 4. Face: Blau
        ]
    }
  }
}
```

pyramide.wrl

23.5 Wiederverwendung

Zur Reduktion der Dateigrößen und zur besseren Lesbarkeit lassen sich einmal spezifizierte Welten wiederverwenden. Beispiel 3 zeigt die Kombination der beiden graphischen Objekte Kugel und Pyramide, wobei die Pyramide leicht nach hinten gekippt oberhalb der Kugel positioniert wird. Ferner wurde ein Hyperlink eingerichtet, der zu einer weiteren VRML-Welt führt, sobald der Mauszeiger auf der Kugel gedrückt wird.

```
#VRML V2.0 utf8
# gruppe.wrl:
# Kugel mit Hyperlink unter gekippter Pyramide

Transform{                              # Plaziere
  children[                             # die folgenden Objekte:

    Anchor {                            # Hyperlink
      url "multimedia.wrl"              # zur VRML-Datei textur.wrl
      description "Next world"          # Anzeige im Statusfenster
      children[                         # zugeordnet ist die Welt
        Inline {url "kugel.wrl"}        # aus Datei kugel.wrl
      ]
    }

    Transform {
      translation  0 1   0              # hebe 1 Einheit nach oben
      scale        1 0.5 1              # skaliere bzgl. y auf 50 %
      rotation     1 0   0 -0.523333    # kippe um 30 Grad nach hinten
      children[                         # verwende Welt
        Inline {url "pyramide.wrl"}     # aus Datei pyramide.wrl
      ]
    }

  ]
}
```

gruppe.wrl

23.6 Multimedia

Neben geometrischen Strukturen können VRML-Szenen auch multimediale Bestandteile wie Bilder, Audio und Video enthalten.

Beispiel 4 zeigt einen Würfel, auf den ein jpg-Bild als Textur aufgebracht wurde. Einem Sound-Knoten ist per URL eine Midi-Datei mit Position und Schallrichtung zugeordnet.

Sobald der Betrachter bei Annäherung an den Würfel eine gewissen Grenzwert überschritten hat, beginnt der Sound-Knoten mit dem Abspielen der Musik.

```
#VRML V2.0 utf8
# multimedia.wrl:
# Quader mit Bild-Textur und Soundquelle

Shape {                              # ein Gestaltknoten
  geometry Box {size 1 1 1}          # ein Quader der Kantenlaenge 1
  appearance Appearance {            # mit dem Aussehen
    texture ImageTexture {           # einer Bild-Textur
      url "posaune.jpg"              # aus der JPEG-Datei posaune.jpg
    }
  }
}

Sound {                              # ein Soundknoten
  source AudioClip {                 # gespeist von einem Audio-Clip
    url  "ragtime.mid"               # aus der Midi-Datei ragtime.mid
    loop TRUE                        # in einer Endlosschleife
  }

  location  0 0 0                    # Schallquelle im Ursprung
  direction 0 0 1                    # dem Betrachter zugewandt
  minFront 1                         # Hoerbereichsanfang
  maxFront 8                         # Hoerbereichsende
}
```

multimedia.wrl

23.7 Interaktion

VRML97 bietet zahlreiche Möglichkeiten, mit denen einer Szene Dynamik und Interaktion verliehen werden kann. Die zentralen Bausteine für die hierzu erforderliche Ereignisbehandlung sind die EventIn- bzw. EventOut-Felder von Knoten, mit denen Meldungen empfangen und Zustandsänderungen weitergeschickt werden können. Es gibt Time,- Proximity-, Visibility-, Collision- und Touch-Sensoren, welche das Verstreichen einer Zeitspanne, das Annähern des Benutzers, die Sichtbarkeit von Objekten, das Zusammentreffen des Avatars mit einem Objekt und die Berührung mit dem Mauszeiger signalisieren. Verständlicherweise müssen Typ des verschickenden Ereignisfeldes und Typ des empfangenden Ereignisfeldes übereinstimmen.

Beispiel 5 zeigt die Kugel versehen mit einem Touch-Sensor, welcher bei Mausdruck eine Nachricht an den Soundknoten schickt, der auf diese Weise seinen Spielbeginnzeitpunkt erhält und die zugeordnete Wave-Datei startet.

```
#VRML V2.0 utf8
# interaktion.wrl:
# Kugel macht Geraeusch bei Beruehrung

Group {                                 # plaziere Gruppenknoten
  children [                            # bestehend aus
    DEF Taste TouchSensor {}            # einem Touch-Sensor
    Inline { url "kugel.wrl" }          # und einer Kugel
  ]
}

Sound {                                 # plaziere Soundknoten
  source DEF Tut AudioClip {            # gespeist von Audio-Clip
    url "tut.wav"                       # aus der Wave-Datei tut.wav
  }
  minFront  5                           # Anfang des Schallbereichs
  maxFront 50                           # Ende des Schallbereichs
}

ROUTE Taste.touchTime                   # bei Beruehrung der Kugel
   TO Tut.set_startTime                 # schicke Systemzeit an den Knoten Tut
```

interaktion.wrl

23.8 Animation

Die benutzergesteuerte oder automatische Bewegung von Objekten und Szenenteilen wird wiederum mit Hilfe der Ereignisbehandlung organisiert. Im Beispiel 6 wird die Ziehbewegung des gedrückten Mauszeigers zur Manipulation der lokalen Translation eines Objekts verwendet und das regelmäßige Verstreichen eines Zeitintervalls löst eine Nachricht an denselben geometrischen Knoten aus, der hierdurch seinen aktuellen Rotationsvektor erhält. Eine solche Konstruktion verlangt einen Orientation-Interpolator, welcher beliebige Bruchzahlen zwischen 0 und 1 auf die zugeordneten Werte seines Schlüsselintervalls abbildet, hier bestehend aus allen Drehwinkeln zwischen 0 und 3.14 (=180 Grad beschrieben in Bogenmaß), bezogen auf die y-Achse.

```
#VRML V2.0 utf8
# animation.wrl:
# selbstaendig sich drehende und interaktiv verschiebbare Pyramide

DEF Schieber PlaneSensor {}            # Sensor zum Melden einer Mausbewegung

DEF Timer TimeSensor {                 # Sensor zum Melden eines Zeitintervalls
  cycleInterval 5                      # Dauer 5 Sekunden
  loop TRUE                            # Endlosschleife
}

DEF Rotierer OrientationInterpolator{  # Interpolator fuer Rotation
  key      [0 , 1]                     # bilde Schluessel 0 und 1 ab auf
  keyValue [ 0  1  0  0                #   0 Grad Drehung bzgl. y
             0  1  0  3.14]            # 180 Grad Drehung bzgl. y
}

DEF Pyramide Transform {               # plaziere Objekt mit Namen Pyramide
      children [                       # bestehend aus
        Inline {url "pyramide.wrl"}    # VRML-Datei pyramide.wrl
      ]
}

ROUTE Timer.fraction_changed           # falls Zeitintervall sich aendert
   TO Rotierer.set_fraction            # schicke Bruchteil an Rotierer

ROUTE Rotierer.value_changed           # falls Drehung sich aendert
   TO Pyramide.set_rotation            # schicke Drehwert an Pyramide

ROUTE Schieber.translation_changed     # falls gedrueckter Mauszeiger bewegt wird
   TO Pyramide.set_translation         # schicke Translationswert an Pyramide
```

animation.wrl

23.9 Scripts

Manchmal reichen die in VRML angebotenen Funktionen wie Sensoren und Interpolatoren nicht aus, um ein spezielles situationsbedingtes Interaktionsverhalten zu erzeugen. Abhilfe schafft hier der sogenannte Script-Knoten, welcher Input empfangen, Daten verarbeiten und Output verschicken kann. Z.B. kann eine vom Touch-Sensor geschickte Nachricht eine Berechnung anstoßen, deren Ergebnis in Form einer Translations-Nachricht an ein bestimmtes Objekt geschickt und dort zur Neupositionierung genutzt wird.

```
#VRML V2.0 utf8
# javascript.wrl:
# Rotation eines Objekts wird ueber Javascript manipuliert

Group {                                 # gruppiere
  children [                            # folgende Objekte
    DEF Taste TouchSensor{}             # Beruehrungssensor Taste
    DEF Pyramide Transform {            # Objekt Pyramide
      children[                         # bestehend aus
        Inline {url "pyramide.wrl"}     # VRML-Welt pyramide.wrl
      ]
    }
  ]
}

DEF Aktion Script {                     # Script mit Namen Aktion
  eventIn  SFBool     isActive          # Input-Parameter
  eventOut SFRotation drehung           # Output-Parameter
  url [                                 # gespeist von
     "javascript:                      // inline-Javascript
     function isActive(eventValue) {   // fuer eventIn zustaendig
       if (eventValue == true) {       // falls eventValue den Wert wahr hat
         drehung[0] = 0.0;             // drehe
         drehung[1] = 1.0;             // bzgl.
         drehung[2] = 0.0;             // der y-Achse
         drehung[3] += 0.174444;       // um weitere 10 Grad
       }
     }"
  ]
}

ROUTE Taste.isActive                    # bei Beruehren der Pyramide
   TO Aktion.isActive                   # sende Nachricht an das Script Aktion

ROUTE Aktion.drehung                    # vom Script Aktion erzeugter Dreh-Vektor
   TO Pyramide.set_rotation             # wird an die Pyramide geschickt
```

javascript.wrl

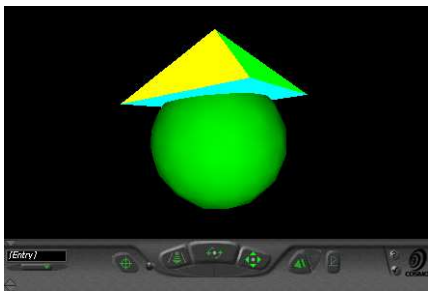
Die Formulierung des Berechnungsalgorithmus geschieht entweder durch ein Javascript-

Programm, inline gelistet im Script-Knoten, oder durch eine assoziierte Java-Klasse, welche in übersetzter Form mit Dateiendung *.class lokal oder im Netz liegt. Zum Übersetzen der Java-Quelle ist das EAI (External Authoring Interface) erforderlich, welches in Form einiger Packages aus dem Verzeichnis importiert wird, in welches sie das VRML-Plugin bei der Installation deponiert hatte.

Beispiel 7 zeigt die Pyramide zusammen mit einem Java-Script, welches bei jedem Aufruf den Drehwinkel bzgl. der y-Achse um weitere 10 Grad erhöht.

kugel.wrl

pyramide.wrl



gruppe.wrl

multimedia.wrl

interaktion.wrl

animation.wrl

Abbildung 23.2: Screenshots der Beispiele 1 - 6

23.10 Multiuser

Eines der ursprünglichen Entwicklungsziele von VRML bleibt auch bei VRML 97 offen: es gibt noch keinen Standard für Multiuser-Welten. Hiermit sind Szenen gemeint, in denen mehrere Benutzer gleichzeitig herumwandern und interagieren können. Da jedes ausgelöste Ereignis von allen Beteiligten wahrgenommen werden soll, muß ein zentraler Server den jeweiligen Zustand der Welt verwalten und den anfragenden Klienten fortwährend Updates schicken. In diesem Zusammenhang erhält der Avatar eine aufgewertete Rolle: Zusätzlich zu seiner geometrischen Räumlichkeit, die schon zur Kollisionsdetektion in einer Single-User-Szenerie benötigt wurde, muß nun auch sein visuelles Äußeres spezifiziert werden, sicherlich ein weiterer wichtiger Schritt zur Verschmelzung eines real existierenden Benutzers mit der von ihm gespielten Rolle.

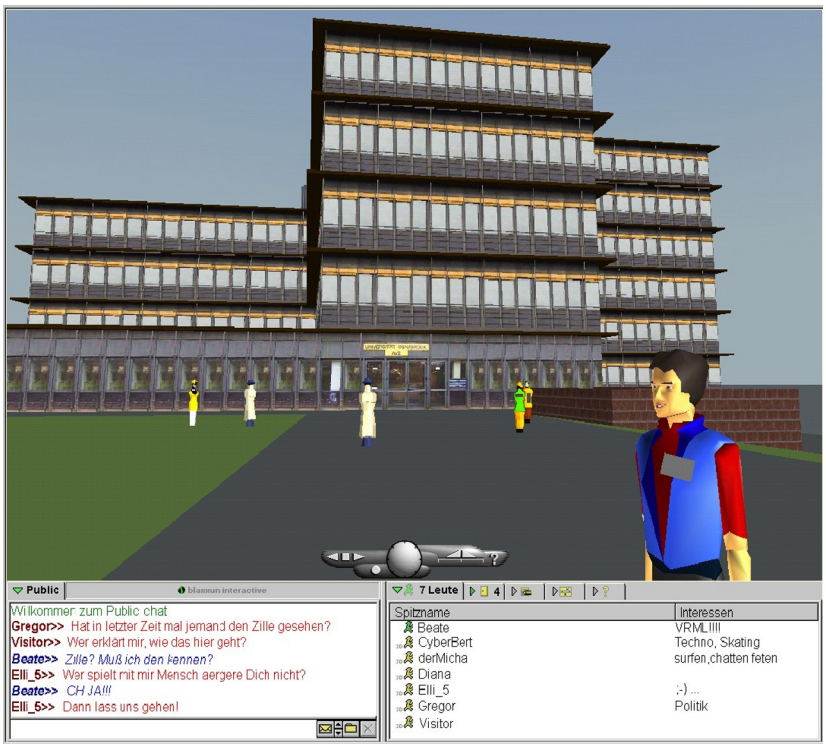


Abbildung 23.3: Screenshot vom Blaxxun Contact Plugin

Unter der Einstiegsseite `http://www-lehre.inf.uos.de/avz` kann das *Virtuelle AVZ* der Universität Osnabrück betreten werden, welches mit Hilfe eines Blaxxun-Community-Servers als Multiuser-Welt realisiert wurde.

Kapitel 24

OpenGL

24.1 Grundlagen

OpenGL bietet eine Schnittstelle zwischen dem Anwenderprogramm und der Grafikhardware eines Computers zum Modellieren und Projizieren von dreidimensionalen Objekten.

Diese Schnittstelle enthält

- 200 Befehle in der *OpenGL Library* (beginnen mit `gl`) zum Verwalten von elementaren geometrischen Primiviten wie Punkte, Linien, Polygone, Bezierkurven und ihrer Attribute wie Farben und Normalenvektoren.
- 50 Befehle in der *OpenGL Utility Library* (beginnen mit `glu`) zum Verwalten von *NURBS* (non uniform rational b-splines) und *quadrics* (Körper mit durch quadratische Gleichungen beschreibbaren Oberflächen, z.B. Kugel, Zylinder) sowie zum vereinfachten Manipulieren von Projektionsmatrizen.

OpenGl enthält keine Routinen zur Benutzerein- und -ausgabe und zur Kommunikation mit dem (plattformspezifischen) Fenstersystem. Hierfür sind zuständig

- 30 Befehle im *OpenGL Utility Toolkit* (beginnen mit `glut`) zur Anbindung der von OpenGl gerenderten Ausgabe an das jeweilige Fenstersystem und zum Verwalten von höheren geometrischen Objekten wie Kugel, Kegel, Torus und Teapot.

Bei manchen OpenGl-Implementationen (z.B. X Window System) kann die Berechnung der Grafik und ihre Ausgabe auf verschiedenen Rechnern stattfinden. Der *Klient* ruft hierbei ein OpenGl-Kommando auf, mit Hilfe eines *Protokolls* wird es übertragen und der *Server* setzt es in ein Bild um.

Um die Kommunikationsbandbreite zu minimieren, arbeitet OpenGl als Zustandsmaschine. Dies bedeutet, daß einmal gesetzte Zustände (z.B. die Vordergrundfarbe) bis zu ihrem Widerruf beibehalten werden. Auch können komplexe geometrische Figuren unter einem Namen in einer *Display-Liste* eingetragen werden, so daß sie im Falle einer Wiederverwendung nicht erneut übertragen werden müssen sondern unter Angabe ihres Namens ausgewertet werden können.

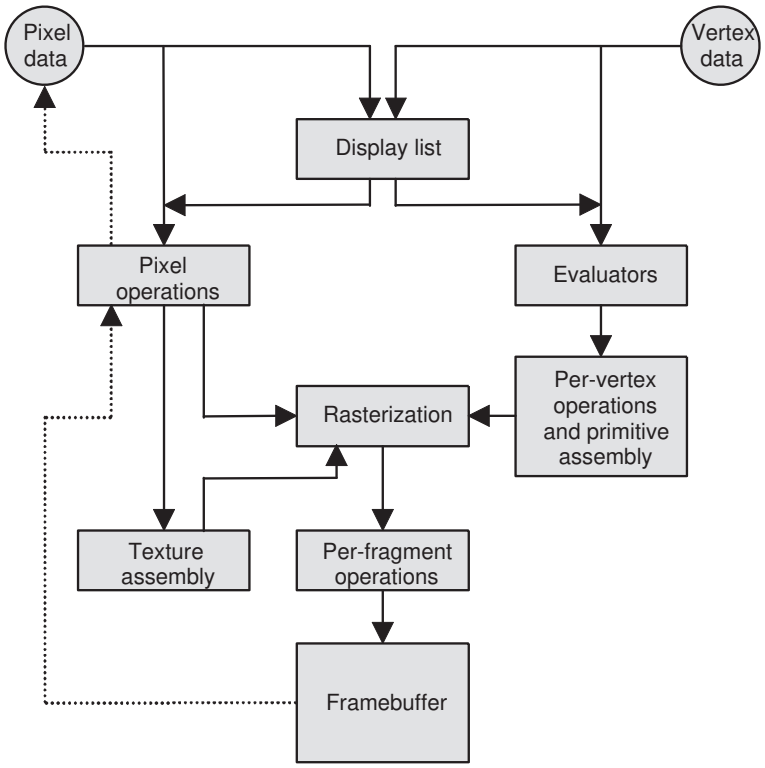


Abbildung 24.1: OpenGl Rendering Pipeline

Die Bestandteile der OpenGl Rendering Pipeline lauten:

- *Vertex data* (Knoten) oder *Pixel data* (Pixel) sind definierende Bestandteile eines zu berechnenden Bildes.
- *display lists* referenzieren Vertex und Pixel data.
- *Pixel operations* regeln das Pre- und Postprocessing von Pixeldaten.
- *evalutators* approximieren die durch Kontrollpunkte definierten parametrischen Kurven und Oberflächen zu Polygonzügen und Flächen samt Normalenvektoren.
- *Per Vertex operations* transformieren 3D-Welt-Koordinaten nach Vorgabe der syntetischen Kamera.
- *Primitive Assembly* erledigt clipping und backface removal.
- *Texture Assembly* bildet benutzerdefinierte Texturen auf Objekte ab.
- *Rasterization* überführt geometrische Daten und Pixelmengen zu *fragments*, welche die für eine Bildschirmkoordinate relevanten Informationen aufsammeln.
- *per fragment operations* bilden den Inhalt eines Fragments unter Berücksichtigung des Tiefenpuffers und unter Anwendung von Nebel- und Alpha-Masken auf eine Bildschirmkoordinate im *Frame buffer* ab.

24.2 Syntax

Durch Aufruf von Prozeduren manipuliert der Benutzer seine Daten. OpenGl verwendet dabei acht Datentypen. Der in Spalte 1 von Tabelle 24.1 genannte Suffix kündigt als letzter Buchstabe eines Kommandos den erwarteten Datentyp an.

Suffix	Datentyp	C-Korrespondenz	OpenGl Name
b	8-bit integer	signed char	GLbyte
s	16-bit integer	short	GLshort
i	32-bit integer	int	GLint
f	32-bit floating point	float	GLfloat, GLclampf
d	64-bit floating point	double	GLdouble, GLclampd
ub	8-bit unsigned integer	unsigned char	GLubyte, GLboolean
us	16-bit unsigned integer	unsigned short	GLushort
ui	32-bit unsigned integer	unsigned int	GLuint, GLenum, GLbitfield

Tabelle 24.1: OpenGL Datentypen

Da OpenGl-Kommandos keine Überladung kennen, müssen für alle sinnvollen Parameterdatentypen unterschiedliche Prozedurnamen vorhanden sein.

Zum Beispiel erzeugt jeder der beiden Befehle

```
glVertex2i(5,3);
glVertex2f(5.0, 3.0);
```

einen zweidimensionalen Punkt mit x-Koordinate 5 und y-Koordinate 3.

Manche OpenGl-Kommandos enden mit dem Buchstaben **v** und signalisieren dadurch, daß sie einen Vektor als Übergabeparameter erwarten. Zum Beipiel kann das Setzen eines RGB-Farbwerts durch Angabe von drei Zahlen oder durch Angabe eines drei-elementigen Vektors geschehen:

```
glColor3f(1.0, 0.8, 0.8);
GLfloat farbvektor[] = {1.0, 0.8, 0.8};
glColor3fv(farbvektor);
```

Elementare geometrischen Figuren (wie z.B. Linien, Dreiecke, Vierecke, Polygone, etc.) werden mittels `glVertex*` durch eine Folge von Punkten $p_0, p_1, p_2, ..., p_{n-1}$ definiert, welche durch zwei Kommandos geklammert wird:

```
glBegin(MODUS);
...
glEnd();
```

Hierbei ist `MODUS` eine der folgenden vordefinierten OpenGl-Konstanten:

`GL_POINTS`	Punkte $p_0, p_1, p_2, ...$
`GL_LINES`	Gradenstücke $(p_0, p_1), (p_2, p_3), ...$
`GL_LINE_STRIP`	Linienzug $(p_0, p_1, p_2, p_3, ..., p_{n-1})$
`GL_LINE_LOOP`	geschlossener Linienzug $(p_0, p_1, p_2, p_3, ..., p_{n-1}, p_0)$
`GL_TRIANGLES`	Dreiecke $(p_0, p_1, p_2), (p_3, p_4, p_5), (p_6, p_7, p_8), ...$
`GL_TRIANGLE_STRIP`	Streifen von Dreiecken $(p_0, p_1, p_2), (p_2, p_1, p3), (p_2, p_3, p_4), ...$
`GL_TRIANGLE_FAN`	Fächer von Dreiecken $(p_0, p_1, p_2), (p_0, p_2, p_3), (p_0, p_3, p_4), ...$
`GL_QUADS`	Vierecke $(p_0, p_1, p_2, p_3), (p_4, p_5, p_6, p_7), (p_8, p_9, p_10, p_11), ...$
`GL_QUAD_STRIP`	Streifen von Vierecken $(p_0, p_1, p_3, p_2), (p_2, p_3, p_5, p_4), (p_4, p_5, p_7, p_6), ...$
`GL_POLYGON`	konvexes (!) Polygon $(p_0, p_1, p_2, ..., p_0)$

Es existieren Stacks von 4×4 Matrizen zur Transformation des Modells und zur Transformation der Projektion.

Die Auswahl geschieht durch `glMatrixMode()`. Durch die Anweisung

```
glMatrixMode(GL_PROJECTION);
```

bzw. durch die Anweisung

```
glMatrixMode(GL_MODEL_VIEW);
```

beziehen sich bis auf weiteres alle Matrix-Operationen auf den Projektions-Stack bzw. auf den Modell-Stack.

Zum Sichern und späteren Wiederherstellen der aktuellen Transformationsmatrix wird diese durch den Befehl `glPushMatrix()` kopiert und oben auf den Stack gelegt. Nun kann sie beliebig manipuliert werden. Ihr Originalzustand kann dann später durch `glPopMatrix()` wiederhergestellt werden.

Multiplikation der obersten Stackmatrix mit einer beliebigen Matrix m geschieht durch Definition der Matrix durch Aufruf der Multiplikation:

```
GLfloat m[][] = {{2.0,0.0,0.0,0.0},
                 {0.0,4.0,0.0,0.0},
                 {0.0,0.0,3.0,0.0},
                 {0.0,0.0,0.0,2.0}};
glMultMatrix(m);
```

24.3 Programmbeispiele

Auf den folgenden Seiten werden einige durch deutsche Kommentare erweiterte OpenGl-Beispiele vorgestellt, die alle dem bei *Addison-Wesley* erschienenen Buch *OpenGL Programming Guide* entnommen wurden. Das Copyright für diese Programme liegt bei der Firma *Silicon Graphics*. Aus Platzgründen wurde auf eine explizite Wiederholung der Copyright-Klausel im jeweiligen Quelltext verzichtet. Eine komplette Sammlung aller Beispiele findet sich unter `http://trant.sgi.com/opengl/examples/redbook/redbook.html` .

hello.c zeigt in Orthogonalprojektion ein rotes Rechteck auf blauem Hintergrund. Es wird zunächst um eine Einheit in x-Richtung verschoben und danach um 45 Grad gedreht.

wire-cube.c zeigt in perspektivischer Projektion einen roten Drahtgitterwürfel vor grünem Hintergrund. Der Würfel ist in y-Richtung um den Faktor 1.5 skaliert und um 30 Grad bzgl. der y-Achse gedreht.

wire-prop-cube.c zeigt in perspektivischer Projektion einen weißen Drahtgittelwürfel vor blauem Hintergrund. Bei Verändern des Ausgabefensters durch den Benutzer wird die Funktion `reshape` aufgerufen, die eine Neuberechnung des Viewports durchführt.

click.c zeigt die Interaktion durch die Maus für den Farbwechsel eines Dreiecks. Die globale Variablen g wird durch den linken Maus-Button auf 1, durch den rechten Mausbutton auf 0 gesetzt. In der Funktion *display* wird dadurch entweder ein gelb oder ein rot erzeugt.

key.c zeigt die Interaktion durch die Tastatur für den Farbwechsel eines Dreiecks. Die globalen Variablen r,g und b werden durch Betätigen der gleichnamigen Tasten entsprechend gesetzt. In der Funktion *display* wird dadurch das RGB-Tripel auf *rot, grün* oder *blau* gesetzt.

planet.c zeigt die Interaktion durch die Tastatur für das Fortschalten einer Rotationsbewegung. Durch Drücken der d-Taste wird die Rotation der Erde um sich selbst um 10 Grad angestoßen, durch Drücken der y-Taste wird die Rotation der Erde um die Sonne um 5 Grad angestoßen.

smooth.c zeigt ein Dreieck mit Farbverlauf. Erreicht wird dies im Smooth-Shading-Modus durch Interpolation von RGB-Werten, welche an den Ecken des Dreiecks vorgegeben sind.

list.c zeigt eine Anwendung von Display-Listen. Unter dem Namen *listName* wird ein rotes, gefülltes Dreieck zusammen mit einer Translation hinterlegt. Ein wiederholter Aufruf dieses Namens erzeugt eine Sequenz von nebeneinander platzierten Dreiecken.

bezier-curve.c zeigt eine durch vier zwei-dimensionale Kontrollpunkte definierte Bezier-Kurve. Zur besseren Sichtbarkeit werden die Kontrollpunkte mit 5-facher Stärke platziert. Die Kurve entsteht durch Auswertung eines Evaluators längs eines von 0 nach 1 in 30 Schritten wandernden Parameters.

bezier-surface.c zeigt ein durch 16 drei-dimensionale Kontrollpunkte definiertes Bezier-Gitter. Das Gitter entsteht durch Auswertung eines Evaluators längs eines von 0 nach 1 in 8 Schritten und von 0 nach 1 in 30 Schritten wandernden Parameters.

teapot.c zeigt den klassischen Utah-Teapot in photo-realistischer Projektion. Berücksichtigt werden Reflektionskoeffizienten für diffuses und spekulares Licht, erzeugt von einer Lichtquelle.

teapot-rotate.c zeigt den klassischen Utah-Teapot in Bewegung. Erreicht wird dies durch die Funktion *spinDisplay*, welche die Rotation um die y-Achse in 5-Grad-Schritten fortschreibt. *spinDisplay* wird durch die Registrierung über *glutIdleFunc* immer dann aufgerufen, wenn keine anderen Events zur Abarbeitung anstehen.

```
#include <GL/glut.h>                          /* Header fuer OpenGl utility toolkit  */
#include <stdlib.h>                           /* Header fuer C-Library               */

void init(void) {                             /* Initialisierung                     */
  glClearColor(0.0, 0.0, 1.0, 0.0);           /* setze Blau als Hintergrundfarbe     */
  glMatrixMode(GL_PROJECTION);                /* betrifft Projektionsmatrix          */
  glLoadIdentity();                           /* beginne mit Einheitsmatrix          */
  glOrtho(0.0, 3.0, 0.0, 2.0, -1.0, 1.0);     /* Orthogonalprojektions-Clip-Ebenen   */
}                                             /* left, right, bottom, top, near, far */

void display(void){                           /* Prozedur zum Zeichnen               */
  glClear(GL_COLOR_BUFFER_BIT);               /* alle Pixel zurecksetzen             */
  glMatrixMode(GL_MODELVIEW);                 /* betrifft Modelview-Matrix           */
  glLoadIdentity();                           /* beginne mit Einheitsmatrix          */
  glRotatef(45,0.0,0.0,1.0);                  /* drehe 45 Grad bzgl. der z-Achse     */
  glTranslatef(1.0, 0.0, 0.0);                /* verschiebe eine Einheit nach rechts */
  glColor3f(1.0, 0.0, 0.0);                   /* Farbe rot                           */
  glBegin(GL_POLYGON);                        /* Beginn eines Polygons               */
    glVertex3f(0.25, 0.25, 0.0);              /* links unten                         */
    glVertex3f(0.75, 0.25, 0.0);              /* rechts unten                        */
    glVertex3f(0.75, 0.75, 0.0);              /* rechts oben                         */
    glVertex3f(0.25, 0.75, 0.0);              /* links oben                          */
  glEnd();                                    /* Ende des Polygons                   */
  glFlush();                                  /* direkt ausgeben                     */
}

int main (int argc, char ** argv) {           /* Hauptprogramm                       */
  glutInit(&argc, argv);                      /* initialisiere GLUT                  */
  glutInitDisplayMode(GLUT_SINGLE|GLUT_RGB); /* single buffer, true color           */
  glutInitWindowSize(750, 500);               /* initiale Fenstergroesse             */
  glutInitWindowPosition(100,100);            /* initiale Fensterposition            */
  glutCreateWindow("hello");                  /* Fenster mit Aufschrift              */
  init();                                     /* rufe init auf                       */
  glutDisplayFunc(display);                   /* registriere display                 */
  glutMainLoop();                             /* beginne Event-Schleife              */
  return 0;                                   /* ISO C verlangt Rueckgabe            */
}
```

hello.c: Rotes Quadrat, gedreht und verschoben, auf blauem Hintergrund

```
#include <GL/glut.h>                          /* Header fuer OpenGl utility toolkit */
#include <stdlib.h>                           /* Header fuer C-Library              */

void init(void) {                             /* Initialisierung                    */
  glClearColor(0.0, 0.0, 1.0, 0.0);           /* setze Blau als Hintergrundfarbe    */
  glMatrixMode(GL_PROJECTION);                /* ab jetzt: Projektionsmatrix        */
  glLoadIdentity();                           /* lade Einheitsmatrix                */
  glFrustum(-1.0,1.0,-1.0,1.0,1.5,20.0);      /* left,right,bottom,top,near,far     */
}

void display(void){                           /* Prozedur zum Zeichnen              */
  glClear(GL_COLOR_BUFFER_BIT);               /* alle Pixel zurecksetzen            */
  glMatrixMode(GL_MODELVIEW);                 /* ab jetzt:  Modellierungsmatrix     */
  glColor3f(1.0, 1.0, 1.0);                   /* Farbe rot                          */
  glLoadIdentity();                           /* Einheitsmatrix                     */
  gluLookAt(0.0, 0.0, 5.0,                    /* Kamera-Standpunkt                  */
            0.0, 0.0, 0.0,                    /* Kamera-Fokussiertpunkt             */
            0.0, 1.0, 0.0);                   /* Up-Vektor                          */
  glScalef(1.0, 1.5, 1.0);                    /* Skalierung in 3 Dimensionen        */
  glRotatef(30.0, 0.0, 1.0, 0.0);             /* rotiere 30 Grad um y-Achse         */
  glutWireCube(2.0);                          /* Drahtgitterwuerfel                 */
  glFlush();                                  /* direkt ausgeben                    */
}

int main (int argc, char ** argv) {           /* Hauptprogramm                      */
  glutInit(&argc, argv);                      /* initialisiere GLUT                 */
  glutInitDisplayMode(GLUT_SINGLE|GLUT_RGB);  /* single buffer, true color          */
  glutInitWindowSize(750, 500);               /* initiale Fenstergroesse            */
  glutInitWindowPosition(100,100);            /* initiale Fensterposition           */
  glutCreateWindow("wire-cube");              /* Fenster mit Aufschrift             */
  init();                                     /* rufe init auf                      */
  glutDisplayFunc(display);                   /* registriere display                */
  glutMainLoop();                             /* beginne Event-Schleife             */
  return 0;                                   /* ISO C verlangt Rueckgabe           */
}
```

wire-cube.c: Perspektivische Projektion eines Drahtgitterquaders, ohne Reshape

```
#include <GL/glut.h>                          /* Header fuer OpenGl utility toolkit */
#include <stdlib.h>                           /* Header fuer C-Library              */

void init(void) {                             /* Initialisierung                    */
  glClearColor(0.0, 0.0, 1.0, 0.0);           /* setze Blau als Hintergrundfarbe    */
  glMatrixMode(GL_PROJECTION);                /* ab jetzt: Projektionsmatrix        */
  glLoadIdentity();                           /* lade Einheitsmatrix                */
  glFrustum(-1.0,1.0,-1.0,1.0,1.5,20.0);      /* left,right,bottom,top,near,far     */
}

void display(void){                           /* Prozedur zum Zeichnen              */
  glClear(GL_COLOR_BUFFER_BIT);               /* alle Pixel zurecksetzen            */
  glMatrixMode(GL_MODELVIEW);                 /* ab jetzt:  Modellierungsmatrix     */
  glColor3f(1.0, 0.0, 0.0);                   /* Farbe rot                          */
  glLoadIdentity();                           /* Einheitsmatrix                     */
  gluLookAt(0.0, 0.0, 5.0,                    /* Kamera-Standpunkt                  */
            0.0, 0.0, 0.0,                    /* Kamera-Fokussierpunkt              */
            0.0, 1.0, 0.0);                   /* Up-Vektor                          */
  glScalef(1.0, 1.5, 1.0);                    /* Skalierung in 3 Dimensionen        */
  glRotatef(30.0, 0.0, 1.0, 0.0);             /* rotiere 30 Grad um y-Achse         */
  glutWireCube(2.0);                          /* Drahtgitterwuerfel                 */
  glFlush();                                  /* direkt ausgeben                    */
}

void reshape(int w, int h) {
  GLfloat p = (GLfloat) w / (GLfloat) h;      /* Proportionalitaetsfaktor           */
  glViewport(0, 0, (GLsizei)w, (GLsizei)h);   /* setze Viewport                     */
  glMatrixMode(GL_PROJECTION);                /* betrifft Projektionsmatrix         */
  glLoadIdentity();                           /* lade Einheitsmatrix                */
  if (p > 1.0)                                /* falls breiter als hoch             */
       glFrustum(  -p,  p,-1.0,1.0,1.5,20.0); /* left,right,bottom,top,near,far     */
  else glFrustum(-1.0,1.0,-1/p,1/p,1.5,20.0); /* left,right,bottom,top,near,far     */
}


int main (int argc, char ** argv) {           /* Hauptprogramm                      */
  glutInit(&argc, argv);                      /* initialisiere GLUT                 */
  glutInitDisplayMode(GLUT_SINGLE|GLUT_RGB);  /* single buffer, true color          */
  glutInitWindowSize(750, 500);               /* initiale Fenstergroesse            */
  glutInitWindowPosition(100,100);            /* initiale Fensterposition           */
  glutCreateWindow("wire-cube-prop");         /* Fenster mit Aufschrift             */
  init();                                     /* rufe init auf                      */
  glutDisplayFunc(display);                   /* registriere display                */
  glutReshapeFunc(reshape);                   /* registriere reshape                */
  glutMainLoop();                             /* beginne Event-Schleife             */
  return 0;                                   /* ISO C verlangt Rueckgabe           */
}
```

wire-prop-cube.c: Perspektivische Projektion eines Drahtgittelquaders, mit Reshape

```
#include <GL/glut.h>                          /* Header fuer OpenGl utility toolkit  */
#include <stdlib.h>                           /* Header fuer C-Library               */

GLfloat g=0.0;                                /* globale Variable                   */

void init(void) {                             /* Initialisierung                     */
  glClearColor(0.5, 0.5, 0.5, 0.0);           /* setze Grau als Hintergrundfarbe     */
  glMatrixMode(GL_PROJECTION);                /* betrifft Projektionsmatrix          */
  glLoadIdentity();                           /* beginne mit Einheitsmatrix          */
  glOrtho(0.0, 1.0, 0.0, 1.0, -1.0, 1.0);     /* Orthogonalprojektions-Clip-Ebenen   */
}                                             /* left, right, bottom, top, near, far */

void display(void){                           /* Prozedur zum Zeichnen               */
  glClear(GL_COLOR_BUFFER_BIT);               /* alle Pixel zurecksetzen             */
  glMatrixMode(GL_MODELVIEW);                 /* betrifft Modelview-Matrix           */
  glLoadIdentity();                           /* beginne mit Einheitsmatrix          */
  glColor3f(1.0,g,0.0);                       /* Farbe gemaess RGB-Tripel            */
  glBegin(GL_TRIANGLES);                      /* Beginn eines Dreiecks               */
    glVertex3f(0.25, 0.25, 0.0);              /* links unten                         */
    glVertex3f(0.75, 0.25, 0.0);              /* rechts unten                        */
    glVertex3f(0.25, 0.75, 0.0);              /* links oben                          */
  glEnd();                                    /* Ende des Dreiecks                   */
  glFlush();                                  /* direkt ausgeben                     */
}

void mouse(int button,int state,int x,int y){/* Maus-Klick bei Koordinate x,y       */
  switch(button) {                            /* analysiere den Mausevent            */
    case GLUT_LEFT_BUTTON:                    /* falls linke Taste gedrueckt         */
      if (state==GLUT_DOWN) g=1.0;            /* setzte Gruenanteil auf 1            */
      break;
    case GLUT_RIGHT_BUTTON:                   /* falls rechte Taste gedrueckt        */
      if (state==GLUT_DOWN) g=0.0;            /* setzte Gruenanteil auf 0            */
      break;
  } glutPostRedisplay();                      /* durchlaufe display erneut           */
}

int main (int argc, char ** argv) {           /* Hauptprogramm                       */
  glutInit(&argc, argv);                      /* initialisiere GLUT                  */
  glutInitDisplayMode(GLUT_SINGLE|GLUT_RGB); /* single buffer, true color           */
  glutInitWindowSize(350, 350);               /* initiale Fenstergroesse             */
  glutInitWindowPosition(100,100);            /* initiale Fensterposition            */
  glutCreateWindow("click");                  /* Fenster mit Aufschrift              */
  init();                                     /* rufe init auf                       */
  glutDisplayFunc(display);                   /* registriere display                 */
  glutMouseFunc(mouse);                       /* registriere mouse                   */
  glutMainLoop();                             /* beginne Event-Schleife              */
  return 0;                                   /* ISO C verlangt Rueckgabe            */
}
```

click.c: Interaktion durch Maus zur Farbwahl

```
#include <GL/glut.h>                          /* Header fuer OpenGl utility toolkit  */
#include <stdlib.h>                           /* Header fuer C-Library               */

GLfloat r=1.0, g=0.0, b=0.0;                  /* globales RGB-Tripel                 */

void init(void) {                             /* Initialisierung                     */
  glClearColor(0.5, 0.5, 0.5, 0.0);           /* setze Grau als Hintergrundfarbe     */
  glMatrixMode(GL_PROJECTION);                /* betrifft Projektionsmatrix          */
  glLoadIdentity();                           /* beginne mit Einheitsmatrix          */
  glOrtho(0.0, 1.0, 0.0, 1.0, -1.0, 1.0);     /* Orthogonalprojektions-Clip-Ebenen   */
}                                             /* left, right, bottom, top, near, far */

void display(void){                           /* Prozedur zum Zeichnen               */
  glClear(GL_COLOR_BUFFER_BIT);               /* alle Pixel zurecksetzen             */
  glMatrixMode(GL_MODELVIEW);                 /* betrifft Modelview-Matrix           */
  glLoadIdentity();                           /* beginne mit Einheitsmatrix          */
  glColor3f(r,g,b);                           /* Farbe gemaess RGB-Tripel            */
  glBegin(GL_TRIANGLES);                      /* Beginn eines Dreiecks               */
    glVertex3f(0.25, 0.25, 0.0);              /* links unten                         */
    glVertex3f(0.75, 0.25, 0.0);              /* rechts unten                        */
    glVertex3f(0.25, 0.75, 0.0);              /* links oben                          */
  glEnd();                                    /* Ende des Dreiecks                   */
  glFlush();                                  /* direkt ausgeben                     */
}

void key(unsigned char key, int x, int y){    /* Bei Tastendruck                     */
  switch(key) {                               /* analysiere den Tastendruck          */
    case 'r': r=1.0; g=0.0; b=0.0; break;     /* falls 'r': setze Tripel auf Rot     */
    case 'g': r=0.0; g=1.0; b=0.0; break;     /* falls 'g': setze Tripel auf Gruen   */
    case 'b': r=0.0; g=0.0; b=1.0; break;     /* falls 'b': setze Tripel auf Blau    */
  }
  glutPostRedisplay();
}

int main (int argc, char ** argv) {           /* Hauptprogramm                       */
  glutInit(&argc, argv);                      /* initialisiere GLUT                  */
  glutInitDisplayMode(GLUT_SINGLE|GLUT_RGB); /* single buffer, true color           */
  glutInitWindowSize(350, 350);               /* initiale Fenstergroesse             */
  glutInitWindowPosition(100,100);            /* initiale Fensterposition            */
  glutCreateWindow("key");                    /* Fenster mit Aufschrift              */
  init();                                     /* rufe init auf                       */
  glutDisplayFunc(display);                   /* registriere display                 */
  glutKeyboardFunc(key);                      /* registriere key                     */
  glutMainLoop();                             /* beginne Event-Schleife              */
  return 0;                                   /* ISO C verlangt Rueckgabe            */
}
```

key.c: Interaktion durch Tastatur zur Farbwahl

```
#include <GL/glut.h>                                  /* OpenGl Utility Toolkit      */
#include <stdlib.h>                                   /* C-library                   */

int year = 0, day = 0;                                /* Variablen fuer Drehungen    */

void init(void) {
   glClearColor (0.0, 0.0, 1.0, 0.0);                 /* blauer Hintergrund          */
   glShadeModel (GL_FLAT);                            /* Flatshading                 */
   glMatrixMode (GL_PROJECTION); glLoadIdentity ();   /* ab jetzt Projektion         */
   gluPerspective(60.0, 1.5, 1.0, 20.0);              /* Blickwinkel, w/h, near, far */
   glMatrixMode(GL_MODELVIEW); glLoadIdentity();      /* ab jetzt Modelview          */
   gluLookAt (0.0,0.0,5.0,0.0,0.0,0.0,0.0,1.0,0.0);  /* Kamera, Fokussier, Up-Vektor*/
}

void display(void){
   glClear (GL_COLOR_BUFFER_BIT);                        /* reset Pixels            */
   glColor3f (1.0, 1.0, 1.0);                            /* Farbe weiss             */
   glPushMatrix();                                       /* sichere Matrix          */
   glRotatef(30.0, 0.0, 1.0, 0.0);                       /* drehe 30 Grad um y      */
   glRotatef(30.0, 1.0, 0.0, 0.0);                       /* drehe 30 Grad um x      */
   glutWireSphere(1.0, 20, 16);                          /* zeichne die Sonne       */
   glRotatef ((GLfloat) year, 0.0, 1.0, 0.0);            /* Drehung um Sonne        */
   glTranslatef (2.0, 0.0, 0.0);                         /* Verschiebung von Sonne  */
   glRotatef ((GLfloat) day, 0.0, 1.0, 0.0);             /* Erd-Drehung             */
   glutWireSphere(0.2, 10, 8);                           /* zeichne die Erde        */
   glPopMatrix();                                        /* restauriere Matrix      */
   glutSwapBuffers();                                    /* tausche Puffer          */
}

void keyboard (unsigned char key, int x, int y){
   switch (key) {                                        /* abhaengig von der Taste */
     case 'd': day =(day+10) % 360; break;               /* erhoehe Tag um 10       */
     case 'y': year=(year+5) % 360; break;}              /* erhoehe Jahr um 5       */
   glutPostRedisplay();                                  /* rufe display auf        */
}

int main (int argc, char ** argv) {          /* Hauptprogramm                        */
  glutInit(&argc, argv);                     /* initialisiere GLUT                   */
  glutInitDisplayMode(GLUT_DOUBLE|GLUT_RGB); /* double buffer, true color            */
  glutInitWindowSize(750, 500);              /* initiale Fenstergroesse              */
  glutInitWindowPosition(100,100);           /* initiale Fensterposition             */
  glutCreateWindow("planet");                /* Fenster mit Aufschrift               */
  init();                                    /* rufe init auf                        */
  glutDisplayFunc(display);                  /* registriere display                  */
  glutKeyboardFunc(keyboard);                /* registriere keyboard                 */
  glutMainLoop();                            /* beginne Event-Schleife               */
  return 0;                                  /* ISO C verlangt Rueckgabe             */
}
```

planet.c: Interaktion durch Tastatur zur Rotationsbewegung

```
#include <GL/glut.h>                          /* Header fuer OpenGl utility toolkit */
#include <stdlib.h>                           /* header fuer C-library              */

void init(void) {
   glClearColor (0.0, 0.0, 0.0, 0.0);         /* Hintergrundfarbe schwarz           */
   glShadeModel (GL_SMOOTH);                  /* smooth shading                     */
}

void display(void) {
   glClear (GL_COLOR_BUFFER_BIT);             /* reset Farbpuffer                   */
   glBegin (GL_TRIANGLES);                    /* Beginn der Dreiecks-Knoten         */
   glColor3f  ( 1.0,  0.0, 0.0);              /* Farbe rot                          */
   glVertex2f (25.0,  5.0);                   /* Knoten unten rechts                */
   glColor3f  ( 0.0,  1.0, 0.0);              /* Farbe gruen                        */
   glVertex2f ( 5.0, 25.0);                   /* Knoten links oben                  */
   glColor3f  ( 0.0,  0.0, 1.0);              /* Farbe blau                         */
   glVertex2f ( 5.0,  5.0);                   /* Knoten unten links                 */
   glEnd();                                   /* Ende der Dreiecks-Knoten           */
   glFlush ();                                /* direkt ausgeben                    */
}

void reshape (int w, int h) {
   GLfloat p = (GLfloat) w / (GLfloat) h;     /* berechne Fensterverhaeltnis        */
   glViewport (0,0,(GLsizei)w,(GLsizei)h);    /* lege Viewport fest                 */
   glMatrixMode (GL_PROJECTION);              /* ab jetzt Projektionsmatrix         */
   glLoadIdentity ();                         /* lade Einheitsmatrix                */
   if (p > 1.0)                               /* falls breiter als hoch             */
        gluOrtho2D (0.0,p*30.0,0.0,30.0  );   /* left,right,bottom,top              */
   else gluOrtho2D (0.0,  30.0,0.0,30.0/p);   /* left,right,bottom,top              */
   glMatrixMode(GL_MODELVIEW);
}

int main (int argc, char ** argv) {           /* Hauptprogramm                      */
  glutInit(&argc, argv);                      /* initialisiere GLUT                 */
  glutInitDisplayMode(GLUT_SINGLE|GLUT_RGB);  /* single buffer, true color          */
  glutInitWindowSize(750, 500);               /* initiale Fenstergroesse            */
  glutInitWindowPosition(100,100);            /* initiale Fensterposition           */
  glutCreateWindow("smooth");                 /* Fenster mit Aufschrift             */
  init();                                     /* rufe init auf                      */
  glutDisplayFunc(display);                   /* registriere display                */
  glutReshapeFunc(reshape);                   /* registriere reshape                */
  glutMainLoop();                             /* beginne Event-Schleife             */
  return 0;                                   /* ISO C verlangt Rueckgabe           */
}
```

smooth.c: Dreieck mit Farbverlauf durch Interpolation

```
#include <GL/glut.h>                                    /* fuer OpenGl utility toolkit*/
#include <stdlib.h>                                     /* fuer C-Library             */

GLuint listName;                                        /* Handle fuer Display-Liste  */

void init (void) {
   listName = glGenLists (1);                           /* trage Namen ein            */
   glNewList (listName, GL_COMPILE);                    /* erzeuge Display-Liste      */
      glColor3f (1.0, 0.0, 0.0);                        /* Farbe rot                  */
      glBegin (GL_TRIANGLES);                           /* Beginn Dreiecks-Punkte     */
      glVertex2f (0.0, 0.0);                            /* Knoten links unten         */
      glVertex2f (1.0, 0.0);                            /* Knoten rechts unten        */
      glVertex2f (0.0, 1.0);                            /* Knoten links oben          */
      glEnd ();                                         /* Ende der Dreiecksliste     */
      glTranslatef (1.5, 0.0, 0.0);                     /* Verschiebe nach rechts     */
   glEndList ();                                        /* Ende der Display-Liste     */
   glShadeModel (GL_FLAT);                              /* verwende Flat-Shading      */
}

void display(void) {                                    /* Anzeige-Routine            */
   GLuint i;                                            /* Integer-Variable           */
   glClear (GL_COLOR_BUFFER_BIT);                       /* reset Farb-Puffer          */
   for (i=0; i<10; i++) glCallList(listName);           /* rufe Display-Liste auf     */
   glBegin (GL_LINES);                                  /* Beginn Linien-Punkte       */
   glVertex2f (0.0,0.5); glVertex2f(15.0,0.5);          /* zwei Knoten                */
   glEnd ();                                            /* Ende Linen-Punkte          */
   glFlush ();                                          /* direkt ausgeben            */
}

void reshape(int w, int h) {                            /* Reshape-Routine            */
   GLfloat p = (GLfloat) w / (GLfloat) h;               /* Fensterverhaeltnis         */
   glViewport(0, 0, w, h);                              /* setze Viewport             */
   glMatrixMode(GL_PROJECTION); glLoadIdentity();       /* ab jetzt Projektion        */
   if (p > 1 ) gluOrtho2D (0.0, 2.0*p, -0.5, 1.5);      /* links, rechts, unten, oben */
         else  gluOrtho2D (0.0, 2.0, -0.5/p, 1.5/p);    /* links, rechts, unten, oben */
   glMatrixMode(GL_MODELVIEW); glLoadIdentity();        /* ab jetzt Modelview         */
}

int main (int argc, char ** argv) {                     /* Hauptprogramm              */
  glutInit(&argc, argv);                                /* initialisiere GLUT         */
  glutInitDisplayMode(GLUT_SINGLE|GLUT_RGB);            /* single buffer, true color  */
  glutInitWindowSize(800, 100);                         /* initiale Fenstergroesse    */
  glutCreateWindow("list");                             /* Fenster mit Aufschrift     */
  init();                                               /* rufe init auf              */
  glutDisplayFunc(display);                             /* registriere display        */
  glutReshapeFunc(reshape);                             /* registriere reshape        */
  glutMainLoop();                                       /* beginne Event-Schleife     */
  return 0;                                             /* ISO C verlangt Rueckgabe   */
}
```

list.c : Dreiecke definiert durch Display-Liste

```
#include <GL/glut.h>
#include <stdlib.h>

GLfloat ctrlpoints[4][3] = {
        {-4.0, -4.0, 0.0}, {-2.0, 4.0, 0.0},
        { 2.0, -4.0, 0.0}, { 4.0, 4.0, 0.0}};

void init(void)
{
   glClearColor(0.0, 0.0, 0.0, 0.0);
   glShadeModel(GL_FLAT);
   glMap1f(GL_MAP1_VERTEX_3, 0.0, 1.0, 3, 4, &ctrlpoints[0][0]);
   glEnable(GL_MAP1_VERTEX_3);
   glMatrixMode(GL_PROJECTION); glLoadIdentity();
   glOrtho(-7.5, 7.5, -5.0, 5.0, -5.0, 5.0);
   glMatrixMode(GL_MODELVIEW); glLoadIdentity();
}

void display(void)
{
   int i;
   glClear(GL_COLOR_BUFFER_BIT);
   glColor3f(1.0, 1.0, 1.0);
   glBegin(GL_LINE_STRIP);
      for (i=0; i<=30; i++) glEvalCoord1f((GLfloat) i/30.0);
   glEnd();
   glPointSize(5.0);
   glColor3f(1.0, 1.0, 0.0);
   glBegin(GL_POINTS);
      for (i=0; i<4; i++) glVertex3fv(&ctrlpoints[i][0]);
   glEnd();
   glFlush();
}

int main(int argc, char** argv)
{
   glutInit(&argc, argv);
   glutInitDisplayMode (GLUT_SINGLE | GLUT_RGB);
   glutInitWindowSize (750, 500);
   glutInitWindowPosition (100, 100);
   glutCreateWindow ("bezier-curve");
   init ();
   glutDisplayFunc(display);
   glutMainLoop();
   return 0;
}
```

bezier-curve.c: zweidimensionale Bezier-Kurve

```
#include <stdlib.h>
#include <GL/glut.h>

GLfloat ctrlpoints[4][4][3] = {
   {{-1.5, -1.5,  4.0}, {-0.5, -1.5,  2.0}, {0.5, -1.5, -1.0}, {1.5, -1.5,  2.0}},
   {{-1.5, -0.5,  1.0}, {-0.5, -0.5,  3.0}, {0.5, -0.5,  0.0}, {1.5, -0.5, -1.0}},
   {{-1.5,  0.5,  4.0}, {-0.5,  0.5,  0.0}, {0.5,  0.5,  3.0}, {1.5,  0.5,  4.0}},
   {{-1.5,  1.5, -2.0}, {-0.5,  1.5, -2.0}, {0.5,  1.5,  0.0}, {1.5,  1.5, -1.0}}
};

void display(void) {
   int i, j;
   glClear(GL_COLOR_BUFFER_BIT | GL_DEPTH_BUFFER_BIT);
   glColor3f(1.0, 1.0, 1.0);
   glPushMatrix ();
   glRotatef(85.0, 1.0, 1.0, 1.0);
   for (j = 0; j <= 8; j++) {
      glBegin(GL_LINE_STRIP);
      for (i = 0; i <= 30; i++) glEvalCoord2f((GLfloat)i/30.0, (GLfloat)j/8.0);
      glEnd();
      glBegin(GL_LINE_STRIP);
      for (i = 0; i <= 30; i++) glEvalCoord2f((GLfloat)j/8.0, (GLfloat)i/30.0);
      glEnd();
   }
   glPopMatrix ();
   glFlush();
}

void init(void) {
   glClearColor (0.0, 0.0, 0.0, 0.0);
   glMap2f(GL_MAP2_VERTEX_3, 0, 1, 3, 4, 0, 1, 12, 4, &ctrlpoints[0][0][0]);
   glEnable(GL_MAP2_VERTEX_3);
   glMapGrid2f(20, 0.0, 1.0, 20, 0.0, 1.0);
   glEnable(GL_DEPTH_TEST);
   glShadeModel(GL_FLAT);
   glMatrixMode(GL_PROJECTION); glLoadIdentity();
   glOrtho(-6.0, 6.0, -4.0, 4.0, -4.0, 4.0);
   glMatrixMode(GL_MODELVIEW); glLoadIdentity();
}

int main(int argc, char** argv) {
   glutInit(&argc, argv);
   glutInitDisplayMode (GLUT_SINGLE | GLUT_RGB | GLUT_DEPTH);
   glutInitWindowSize (750, 500); glutInitWindowPosition (100, 100);
   glutCreateWindow ("bezier-surface"); init ();
   glutDisplayFunc(display);
   glutMainLoop();
   return 0;
}
```

bezier-surface.c : dreidimensionale Bezierkurve

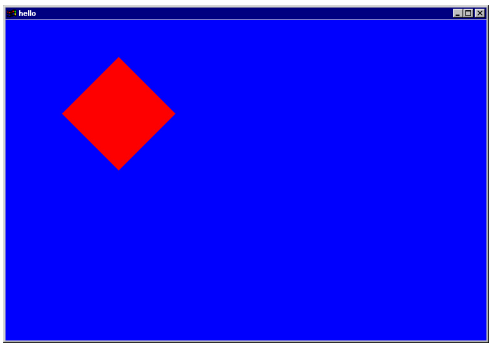
```
#include <GL/glut.h>
#include <stdlib.h>

void init(void) {
   GLfloat mat_diffuse[]      = { 1.0, 0.3, 0.3, 1.0 };
   GLfloat mat_specular[]     = { 1.0, 1.0, 1.0, 1.0 };
   GLfloat mat_shininess[]    = { 50.0 };
   GLfloat light_position[]   = { 1.0, 1.0, 1.0, 0.0 };
   glClearColor (0.0, 0.0, 0.0, 0.0);
   glShadeModel (GL_SMOOTH);
   glMaterialfv (GL_FRONT,  GL_DIFFUSE,   mat_diffuse);
   glMaterialfv (GL_FRONT,  GL_SPECULAR,  mat_specular);
   glMaterialfv (GL_FRONT,  GL_SHININESS, mat_shininess);
   glLightfv    (GL_LIGHT0, GL_POSITION,  light_position);
   glEnable(GL_LIGHTING);
   glEnable(GL_LIGHT0);
   glEnable(GL_DEPTH_TEST);
}

void display(void) {
   glClear (GL_COLOR_BUFFER_BIT | GL_DEPTH_BUFFER_BIT);
   glPushMatrix();
   glRotatef(-40.0, 0.0, 1.0, 0.0);
   glRotatef( 20.0, 1.0, 0.0, 0.0);
   glutSolidTeapot(1.0);
   glPopMatrix(); glFlush ();
}

void reshape (int w, int h){
   GLfloat p = (GLfloat) w / (GLfloat) h;
   glViewport (0, 0, (GLsizei) w, (GLsizei) h);
   glMatrixMode (GL_PROJECTION); glLoadIdentity();
   if (p > 1.0) glOrtho(-1.5*p,1.5*p,-1.5,1.5,-10.0,10.0);
           else glOrtho(-1.5,1.5,-1.5/p,1.5/p,-10.0,10.0);
   glMatrixMode(GL_MODELVIEW);
   glLoadIdentity();
}

int main(int argc, char** argv) {
   glutInit(&argc, argv);
   glutInitDisplayMode (GLUT_SINGLE|GLUT_RGB|GLUT_DEPTH);
   glutInitWindowSize (750, 500);
   glutInitWindowPosition (100, 100);
   glutCreateWindow ("teapot");
   init ();
   glutDisplayFunc(display);
   glutReshapeFunc(reshape);
   glutMainLoop(); return 0;
}
```

teapot.c: Teekanne mit Beleuchtung

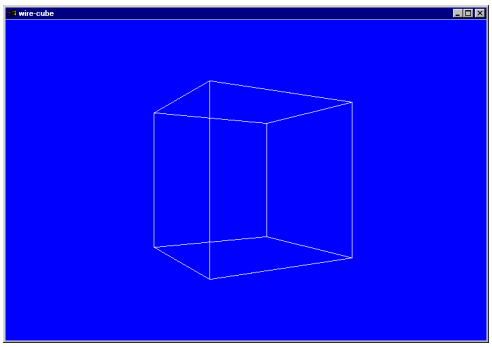
```
#include <GL/glut.h>                                    /* OpenGl Utiltiy Toolkit  */
#include <stdlib.h>                                     /* C-library               */

int g;                                                  /* Variable fuer Gradzahl  */

void init(void) {
   GLfloat mat_diffuse[]      = { 1.0, 0.3, 0.3, 1.0 };  /* diffuse Farbe          */
   GLfloat mat_specular[]     = { 1.0, 1.0, 1.0, 1.0 };  /* spekulare Farbe        */
   GLfloat mat_shininess[]    = { 50.0 };                /* Reflexionskoeffizient  */
   GLfloat light_position[]   = { 1.0, 1.0, 1.0, 0.0 };  /* Lichtquellenposition   */
   glClearColor (0.0, 0.0, 0.0, 0.0);                   /* Hintergrundfarbe       */
   glShadeModel (GL_SMOOTH);                            /* smooth shading         */
   glMaterialfv(GL_FRONT, GL_DIFFUSE,  mat_diffuse);    /* diffuse Farbzuweisung  */
   glMaterialfv(GL_FRONT, GL_SPECULAR, mat_specular);   /* spekulare Farbzuweisung */
   glMaterialfv(GL_FRONT, GL_SHININESS,mat_shininess);  /* Reflexionszuweisung    */
   glLightfv   (GL_LIGHT0,GL_POSITION, light_position); /* Lichtpositionszuweisung */
   glEnable(GL_LIGHTING); glEnable(GL_LIGHT0);          /* Beleuchtung aktivieren  */
   glEnable(GL_DEPTH_TEST);                             /* Tiefentest aktiveren    */
   glMatrixMode (GL_PROJECTION); glLoadIdentity();      /* ab jetzt Projektion     */
   glOrtho(-1.95,1.95,-1.5,1.5,-10.0,10.0);             /* links,rechts,unten,oben */
   glMatrixMode(GL_MODELVIEW); glLoadIdentity();        /* ab jetzt Modelview      */
}

void display(void) {
   glClear (GL_COLOR_BUFFER_BIT|GL_DEPTH_BUFFER_BIT);   /* reset Buffer           */
   glPushMatrix();                                      /* rette Matrix           */
   glRotatef((GLfloat) g, 0.0, 1.0, 0.0);               /* g grad Grad um y-Achse  */
   glRotatef( 20.0, 1.0, 0.0, 0.0);                     /* 20 Grad um x-Achse      */
   glutSolidTeapot(1);                                  /* zeichne Teapot         */
   glPopMatrix();                                       /* restauriere Matrix     */
   glutSwapBuffers();                                   /* wechsele Puffer        */
}

void spinDisplay(void) {
  g = (g + 5) % 360;                                    /* Gradzahl um 5 erhoehen  */
  glutPostRedisplay();                                  /* display erneut aufrufen */
}

int main(int argc, char** argv) {
   glutInit(&argc, argv);                               /* initialisiere GLUT     */
   glutInitDisplayMode(GLUT_DOUBLE|GLUT_RGB|GLUT_DEPTH); /* Double buffer, ...    */
   glutInitWindowSize (750, 500);                       /* initiale Fenstergroesse */
   glutInitWindowPosition (100, 100);                   /* initiale Fensterposition*/
   glutCreateWindow ("teapot-rotate");                  /* Fenster mit Aufschrift  */
   init ();                                             /* Initialisierung        */
   glutDisplayFunc(display);                            /* registriere display    */
   glutIdleFunc(spinDisplay);                           /* registriere spinDisplay */
   glutMainLoop(); return(0);                           /* starte Hauptschleife   */
}
```

teapot-rotate.c: rotierende Teekanne

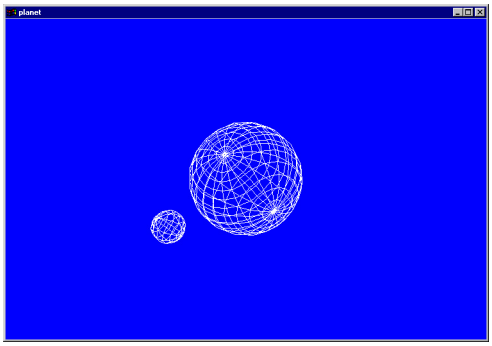
24.4 Screenshots



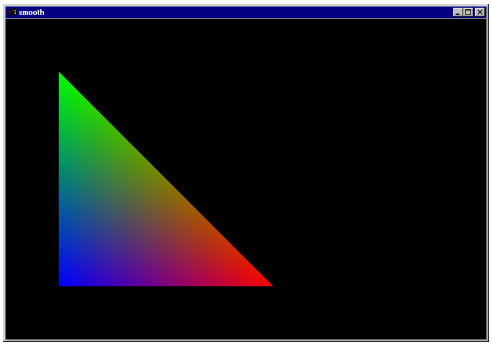
hello.exe



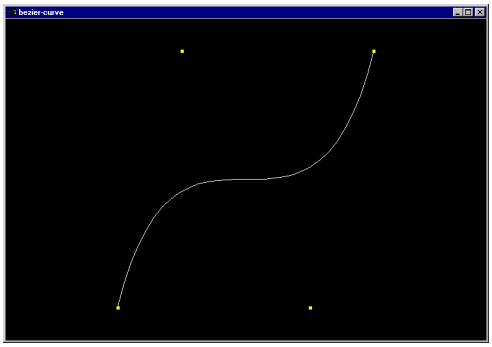
wire-cube.exe



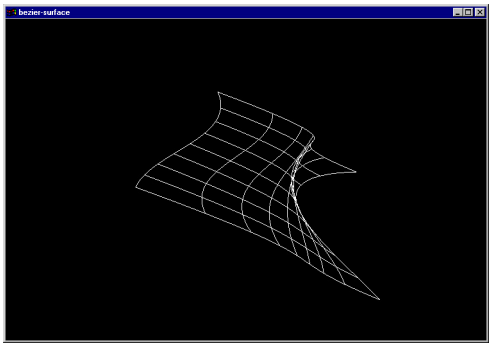
planet.exe



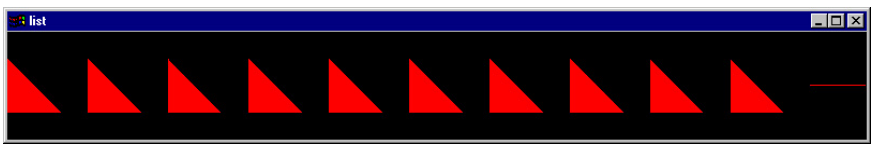
smooth.exe



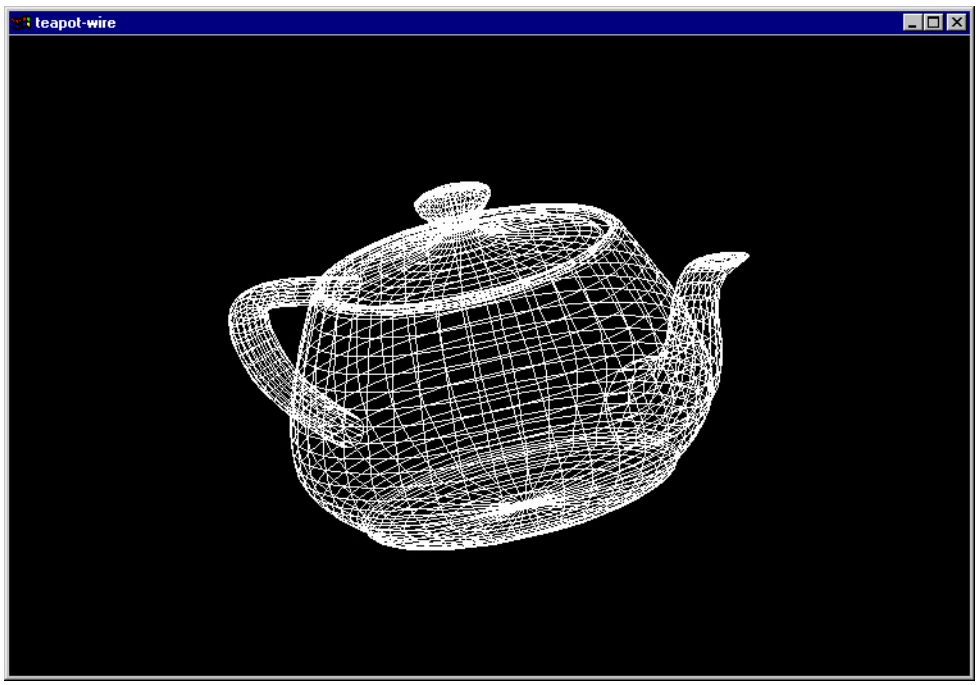
bezier-curve.exe



bezier-surface.exe



list.exe



Drahtgitter für teapot

teapot.exe